

数 学 科

1 ねらい

国際的な学力調査の結果、日本の高校生は公式にあてはめたり、解法の手順が決まっていれば答が一つしかないような問題には強いけれども、学んだ知識や技能を活用して身の周りの事象に関する問題を解決することや、オープンエンドの問題(=答が多様で一つに決まらない問題)などには弱いということが明らかになっています。

県内で実際に数学の指導に取り組まれている先生方からも次のような声が聞かれます。

- ・ 真面目であるが考えようとしなない。
- ・ ちょっと目先を変えて問題を出すとまったく手が出ない。
- ・ 過程を軽視して答えだけを求めたがる。

ところで、日本の高校における数学の授業形態は「用語・記号の説明→公式・定理の説明→公式を利用した例題の解説→練習問題」というサイクルでの、教師が黒板に書いて話すという一方通行の講義型で行われているのがほとんどです。こうした形態の授業だけでは残念ながら生徒の思考力等を育むことは期待できません。

思考力等を高めるためには、対象となっているものを既知の内容と比較し、共通点や相違点を見つけて関係づけや分類をしたり、自分の考えと人の考えを突き合わせて推論が正しいかどうかを確かめたり、人の考えをヒントにしながら自分の考えを発展させたりすることが必要で、そのような学習活動を教師が意識的に仕組んでいかねばなりません。

いま、わが国の高校生には思考力・表現力や学習意欲を育むことが強く求められています。そして、今回の学習指導要領改訂に際し、思考力等を育成するための手段として言語活動が取り上げられ、その充実が盛り込まれました。改善の基本方針として「根拠を明らかにし筋道を立てて体系的に考えることや、言葉や数、式、図、表、グラフなどの相互の関連を理解し、それらを適切に用いて問題を解決したり、自分の考えを分かりやすく説明したり、互いに自分の考えを表現し合ったりすることなどの指導を充実する」と示されています。

2 数学科における言語活動

(1) 言語活動の充実でめざす力とは

「数学の論理は、元来、自分自身が納得し、回りの他者を納得させるためのものであり、数学の学習においても当然、『説明する』、『議論する』という場面があってしかるべきものである。このような活動が、内容の理解を深めるとともに、様々な場面で数学を活用することや健全な批判力を育てることにつながるのである。」これは学習指導要領解説の中で言語活動の重要性に言及した記述です。そして数学の学習において「自らの考えを数学的に表現し根拠を明らかにして説明したり、議論したりすること」を求めています。

言語活動をとおして育成する思考力や表現力として、本調査研究では具体的に、①問題の構造を的確に捉える力、②筋道を立てて考える力、③論理的整合性のある表現をする力の3つとして捉え、これらの力がつくような言語活動を考えていきます。

(2) 言語活動の場面

授業中の次のような場面を想像してみてください。

- ア) 公式や定理を導くとき。
- イ) いくつかの公式・定理や基本的な処理方法を組み合わせて問題を解くとき。
- ウ) 問題を解いて解答を作成するとき。

従来の講義型の授業においては、アやイの場面では教師が要領よく説明していました。その説明を聞いた生徒は「わかったつもり」になっていることが多々あります。また、講義型の一方通行の授業の場合、生徒はどうしても退屈になります。ときには、教師の説明に出てくる着眼や発想に対して、「そんなこと自分には考えつかない」「自分は数学に向いていない」と数学への苦手意識が芽生えたり、数学嫌いを生む引き金になったりしていることもあります。

そこで、これらの場面に生徒同士の討議や説明をうまく取り入れて、生徒から解決のアイデア(知恵)が出るようにすれば、当の生徒にとっても周りの生徒にとってもインパクトが強く、思考を活性化させます。また、一人で考えたときに「わかったつもり」になっていた生徒は断片的であった思考が一つにつながって明確になります。くわえて、有能感や知的好奇心をもたせることができるので、苦手意識や数学嫌いの低減にも繋がります。

ウの場面で、解決過程を人に説明する活動を取り入れると、生徒は自分の解答の推論の誤りや不備に気づき、また、独り善がりや論理性に欠ける解答では他人に理解してもらえないことを認識し、わかりやすく論理性のある解答づくりを意識するようになります。

ほかにも言語活動が有効な例として、用語や記号の定義を生徒に説明させてみるのもいいでしょう。 $\sin(30^\circ + 45^\circ) = \sin 30^\circ + \sin 45^\circ$ のような誤りをする生徒がいますが、「サイン」の定義がきちんとわかっていればこれが間違いであることに気づくはずで、定義にもどって考えるというのは思考の基本であり、正しい推論を行う出発点となります。

なお、学習指導要領解説には次のような例示がありますので参考にしてください。

- ・授業のまとめとして、その時間のポイントなどを生徒に表現させる。
- ・問題の解答を板書させ、どのように考えて解いたかを説明させたり、どのようにすればよりよい表現になるかを考えさせたりする。
- ・問題の解決で、誤った解答に対しては、どこが誤りか、誤っていると言える理由は何か、どこをどのように修正すれば正答になるかなどを生徒に考えさせ説明させる。

(3) 言語活動の形態

授業で取り入れる言語活動の形態としては、

- a) 生徒同士の討議(4人程度の小集団で、ペアで、クラス全体で)
- b) 生徒から生徒への説明(生徒1人がクラスや小集団へ、ペアで互いに)
- c) 教師の発問・質問に生徒が自分の考えを発表する

などが考えられます。形態は固定的に捉えるのではなく、それぞれの場面で思考を活性化させるためにはどんな形態がもっとも適しているのか、柔軟に工夫することが大切です。

(4) 言語活動が有効な単元や題材

思考力を要しない単元などありませんから、基本的にすべての単元で言語活動は有効で

す。中でも「データの分析」「場合の数と確率」「整数」「数列」などの離散数学分野は、新たな知識・技能を習得よりも、中学までに習得した知識・技能を活用する教材(題材)が多く、言語活動が有効に働く場面を数多く含んでいるといえます。また、「命題と論証」は数学特有の推論を扱っており、言語活動に適した単元です。

さらに、教科書の章末問題や大学入試問題は、解決の見通しが立ちにくく、解決過程を論理的整合性をもって表現することも簡単でないために言語活動は有効です。

なお、すぐに結論が得られてしまう題材や簡単に説明できる題材には言語活動は適しません。いろいろな考えを出し合える題材や誤った推論をしがちな題材、説明に工夫を要する題材を選びましょう。

留意点

今回の「言語活動の充実」は、単に生徒に討議させたり説明させることを求めているものではありません。思考力や表現力の育成という目的に合う場面で、効果的な形態の言語活動を取り入れていかねばなりません。

- ・この場面では生徒同士に討議させた方が、(教師が説明するより)よく考えるはずだ。
- ・ここは勘違いしやすいところだから、ペアで互いに説明させてチェックさせよう。
- ・この考え方は一人では難しいから小集団で話し合わせて解決させてみよう。

こうした意図をつねにもっておきましょう。

3 Q & A

Q 1 授業時数が足りなくて、朝・放課後や長期休業中に課外授業をやっている状況で、さらに言語活動を取り入れる必要があるのでしょうか。

A 1 教える側の発想の転換が必要です。これまで私たち教師は、“活用”や“探究”する中で育むべき思考力等までを、知識や技能と同じように捉えて“習得”させようとしてきたところがあります。かなりの思考を要する難しい問題でさえ、多くの教師がその解法を定石化して知識・技能として習得させることに力を注いできたところがあります。今回の言語活動は「考えようとしなない」「目先を変えた問題に対応できない」といった状況を克服し、思考力等を育成しようとするものですから、私たち教師は、授業で取り扱う教材が知識・技能として習得させるべき教材であるのか、思考力等の育成に資する教材であるのかをよく見極め、後者であるときに効果的な言語活動を仕組んでいきましょう。

Q 2 私の勤務校では、基礎的・基本的な知識・技能の習得がままならず、思考力とか表現力とかを望める状況ではありません。どうすればいいのでしょうか。

A 2 生徒の実態や学校の教育目標に沿った思考力・表現力とはどんなものなのかを考えて授業づくりを進めることが大切です。いくつか例をあげてみましょう。

①活用するために必要となる知識・技能を生徒に提示した上で、それを活用させて

みる。つまり「このことを使っていいから、これを考えてみよう」というようなやり方です。生徒は“活用”の楽しさを経験する中で、そこに必要な知識・技能の重要性に気づいて“習得”にも前向きになることが期待できます。

②用語や記号の定義を説明させてみる。定義の確認は知識の確実な習得にも有効ですし、思考のための土台づくりになります。

③例えば“ a か b と c は 0 である”という表現の解釈について討議させ、これは2通りに解釈できる曖昧な表現であることに気づかせて、だれもが一意的に解釈できるためにはどう表現すればよいかを話し合っ発表させる。

Q 3 言語活動は大学入試の指導にも役立つのでしょうか。

A 3 大学入試に思考力や表現力は欠かせません。その思考力・表現力が生徒に備わっていないことで、指導に苦慮している先生が多いようです。1・2年生の段階から言語活動をとおして少しずつ思考力等を育ておけば、いまの状況よりも入試問題演習に生徒がもっと自力で取り組めるようになることが期待できます。推薦入試の口頭試問に有効であるのは言うまでもありません。

Q 4 学習指導要領の今次改訂のポイントは「言語活動の充実」だということですが、数学では「数学的活動」が強調されています。どちらが重要なのでしょうか。

A 4 今回の学習指導要領では数学的活動について3つの配慮事項が挙げられ、その3番目に「自らの考えを数学的に表現し根拠を明らかにして説明したり、議論したりすること」と言語活動の充実に関する記述があります。つまり、言語活動は数学的活動の一環として位置づけられています。なお、「数学的活動」とは“数学学習にかかわる目的意識をもった主体的活動”とされていて、生徒が受け身の姿勢になるような学習は数学的活動とはいえません。言語活動を取り入れる際にも、生徒に目的意識をもたせて、主体的に活動するように工夫しましょう。

Q 5 討議などを取り入れると生徒は積極的に授業に参加すると思いますが、意欲や態度面だけでなく、「思考力がついた」といえるようにしなければならないと考えます。思考力がついたかどうかを評価するにはどうすればいいのでしょうか。

A 5 ぜひ実践してもらいたいのは、その時間に思考したことを振り返って自分なりに整理させ、解決にいたるまでの推論を再構築して発表させることです。これは表現力の育成にも繋がります。学習指導要領の「授業のまとめとして、その時間のポイントなどを生徒に表現させる」という例示と軌を一にするものです。

もう一つは考查問題の工夫です。これまでよく見られたような、解法を定石化し、それを習得したかどうかを問うような問題では思考力を診ることはできません。知識や技能をいかに活用するかという視点での問題づくりが求められます。

4 学習指導の事例

数学－1 問題解決の方法を小集団で討議して考える事例

単元名	図形の計量（三角比）	本時の学習内容	正弦定理・余弦定理の応用
本時の目標： 正弦定理や余弦定理を活用して、三角形や四角形の辺や対角線の長さ、角の大きさを求める。			
言語活動を充実させた部分	学習活動	教師の支援、指導上の留意点	評価
	⋮	⋮	
	4. 円に内接する四角形の問題を解く。 問題 円に内接する四角形 $ABCD$ において、 $AB=5$, $BC=9$, $CD=7$, $DA=5$, $\angle ABC=\theta$ とする。次の値を求めよ。 (1) $\cos \theta$ (2) 対角線 AC (3) 円の半径 R		
	(ア) 一人で考える。 (イ) 小集団(4人)で討議しながら解決する。 (ウ) 代表生徒1名が板書して発表する。	<ul style="list-style-type: none"> 考える時間の確保 必要に応じてヒントを与える。 	討議を通して問題解決ができていないか。 (数学的な見方や考え方)
⋮	⋮		

本時はこの学習活動の前に次の問題に取り組んでいます。

例題12 $\triangle ABC$ において、 $b=2$, $c=1+\sqrt{3}$
 $A=60^\circ$ のとき、 a , B , C を求めよ。

応用例題1 $\triangle ABC$ において $b=2\sqrt{3}$, $c=2$,
 $C=30^\circ$ のとき、 A , B , a を求めよ。



授業者の感想

これまで小集団で討議させたことなどなかったが、本時のような問題解決の場面なら言語活動の充実の趣旨に適うのではないかと取り入れてみた。

導入段階で、本時の約束として「しっかり考えてよく喋る」ということを生徒へ告知しておく必要を感じた。今回は十分にうまくはやらなかったが有効な手段だと認識した。

生徒の状況

(参観者の感想から) 初めての小集団討議で教師・生徒ともに慣れないところもあったようだが、退屈そうにしている生徒が一人もいなくて、全員がよく考えている様子が窺えた。

ここがポイント

本事例は、既知の定理・公式や既得の数学的処理方法を組み合わせて問題を解決する場面に小集団討議を取り入れた事例です。このような問題は一人では解決できない場合が多く、小集団での討議でアイデア(知恵)を出し合いながら解決することを通して、生徒は一人だけで考えるよりもずっと思考力をつけていきます。

<ポイント1> 討議を促進するための適切な支援を

小集団の討議が進まないときに何の支援もしないまま放っておいてはいけません。討議を促進するように見通しをもたせたり、キーワードを与えたりしましょう。

- (例) ・「円に内接しているという条件から、どんなことがいえるだろう？」
・「 θ の絡む三角形が2つあるよ。」

<ポイント2> 小集団討議に適した教材(題材)かどうかを見極める

本事例の場合、例題12は小集団討議に適しません。余弦定理や正弦定理にあてはめるだけで解決できるので、例題12でめざすものは技能の習得であり、思考力の育成ではないからです。同様に、応用例題1も**B**は正弦定理を使えば求めることができ、これを糸口に**A**、**a**と求められるため、小集団討議には適しません。ただし、**A**、**B**を問わずに**a**だけを問うているなら、思考力を必要とするため、小集団討議が有効になります。

<ポイント3> 思考する部分だけを重点的に討議させる

本事例では、(1)の $\cos \theta$ に関する1次方程式ができたところで討議は終了させて構いません。この1次方程式から $\cos \theta$ の値を求めることは基本的な技能であって討議の必要はないからです。(2)の対角線**AC**、(3)の半径**R**も簡単に求めることができるものですから、家庭学習でやっておくように指示すれば短い時間で終わります。

小集団による討議は時間がかかり、授業進度が遅れることが予想されます。こうした隘路の打開策として、基礎的・基本的な知識や技能に関する部分を割愛するのは有効な方法です。ただし、その前段に知識・技能の習得を十分に図っておく必要があります。

<ポイント4> 小集団は4人で構成するのが基本

いろんなアイデア(知恵)が出てくるためには小集団の人数は多ければ多いほうが良さそうですが、人数を増やしていくと、討議に参加せず考えようとしないう生徒が出てきます。すべての生徒が討議に参加して知恵(アイデア)を出し合うのに適した人数は4人がいいでしょう。端数が出るときや内容によっては3~5人で構成しましょう。

<ポイント5> 振り返りで推論の再構築を

授業の最後に、問題解決までの思考過程を振り返って整理し、自分なりにまとめる時間をぜひ設定しましょう。解決するために用いた知識・技能を確認し、それらをどのように用いて推論したかを再確認することで思考力が育まれます。(Q&A-5参照)

ほかの単元でもこのような活動は有効です

本事例は、生徒が自分一人だけでは解決できないようなときに、小集団で討議しながら解決しようとするものです。教科書の「章末問題」にはこのような問題が多く存在します。また、大学入試問題を教材にした演習もまた同様です。

数学－２ 正しく推論して、その過程をわかりやすく説明する事例

単元名	命題と論証	本時の学習内容	命題の真偽の判定
本時の目標： 整数に関する命題の真偽を考察することを通して、正しく推論し、その過程をわかりやすく説明できる。			
	学習活動	教師の支援、指導上の留意点	評価
	：	：	
言語活動を充実させた部分	2. 命題の真偽の判定方法を考える。		
	問題 a, b を整数とする。次の命題の真偽をいえ。 $(2a+1)(3b+1)$ が 6 で割り切れるならば、 $2a+1$ は 3 で割り切れる。 この問題に対して、Kさんは「真」と答えました。なぜなら、 $a=1, b=3$ を代入すると成立するからです。このKさんの真偽の判定は適切でしょうか。		
	(ア) Kさんの判定は適切かどうか、各自で考える。 不適切と判断した場合は、その理由と適切な判定方法を書く。	<ul style="list-style-type: none"> 家庭学習で、事前にこの命題の真偽を判定させておく。 	論理的に説明できているか。 「反例」や「 $2a+1$ は奇数」「 $3b+1$ は3, 6で割り切れない」などが生徒から発せられるか、対偶をとって証明できるか、など。 (数学的な見方や考え方)
	(イ) 指名された生徒が(ア)の結果を口頭で発表する。 (数名の生徒)	<ul style="list-style-type: none"> 全員が理解できるよう意識させて発表させる。 発表内容を類型化する。 	
予想される発表内容 ○ $a=1, b=3$ のとき成立しても、反例がほかにあるかもしれないから、この判定方法は不適切。 × 反例として、 $a=2, b=\frac{5}{3}$ があるが、 a, b が整数であることに反するので反例はない。よって、この命題は真。 △ 仮定が成り立つのは、 $2a+1$ が 3 の倍数、 $3b+1$ が 2 の倍数のときだから、この命題は真。			
(ウ) 発表内容の妥当性について、全員で討議する。	<ul style="list-style-type: none"> 「誰もが理解できるように」という意識を持って討議させる。 		
	：		
	全体討議のほかにグループ討議やペア交流も考えられます。		

授業者の感想

これまでにも生徒に説明させたり記述させたりすることを重視してきたが、本単元では特に力を入れて取り組んだ結果、これまでよりも反例がないかを考えたり、実数か整数かなどにこだわるようになり、一定の成果が上がっていると感じている。

生徒の状況

(参観者の感想から) W先生は日頃からこうした授業に取り組まれているので、生徒たちは慣れていてよく討議に参加しており、見習う点が多かった。

ここがポイント

本事例は、論理的に考える力や説明できる力を高めることをねらいとして、真偽の判定根拠や推論の進め方が正しいかどうかを全員で討議した事例です。「友達の説明に疑問が残った」「自分の説明をみんなに納得してもらえなかった」という経験を通して論理的な思考力や表現力が高まります。

<ポイント1> 単元の特長を生かす

学習指導要領改訂に伴い、「命題と論証」は従前の数学Aから数学Iに移され、すべての高校生が履修することになりました。ここでの学習を通して、数学の正しい推論のしかたを身につけさせたいものです。この單元には「問答」に適した題材が数多くありますので、言語活動を取り入れることにより、生徒に「論理力が高まった」と実感させやすいところです。その一方で、この單元には公式や定理がほとんどなく、問題解決のマニュアルめいたものもないために、逆に難しく感じる生徒がいますが、正しい推論であるかどうかを考えることにより、数学への向き合い方を変える契機にもなります。

<ポイント2> だれもが理解できる説明であるかを意識させる

人に説明したり、人の説明を聞いたりする中で、生徒はそこでの推論が正しいかどうかをよく考えます。人に説明するときも、人の説明を聞く(読む)ときも、「なぜ? どうして?」という意識をもって話したり、聞いたり(読んだり)することが大切であることを認識させましょう。

<ポイント3> 討議する前に一人で考えさせておく

問題を与えてすぐに討議させるのではなく、事前に一度個別に考えさせて、自分でわかったこと、わからなかったことを明確にさせておくことで討議が深まります。

<ポイント4> 全体討議のほかに小集団討議やペア交流も

本事例では生徒の発表をもとに全体討議をしていますが、事例1と同じような小集団討議や、ペアでわからないところや疑問に思ったところを互いに説明させたりすることも有効です。題材(内容)によって使い分けていきましょう。

とくに全体討議の場合は、数学が得意な生徒と不得手な生徒との間で焦点の当て方に難しいところがありますが、小集団やペアでの説明・教え合いを取り入れることで、双方の生徒の力を伸ばすことができます。

<ポイント5> 説明だけでなく記述させることも大切

論理力を高めるための言語活動というと「説明すること」が中心になりがちですが、自分の思考を整理するために「記述すること」も有効です。口から発した言葉は消えてしまいがちですが、記述したものは記録として残り、見返しができるために、間違いや条件不足などに気づきやすくなります。

ほかの單元でもこのような活動は有効です

背理法や数学的帰納法など数学特有の証明法を身につけて論証を行う場合も、本事例と同じような学習活動が考えられます。また、新学習指導要領で数学Iに入ってきた「データの分析」では、データの処理よりも分析に重点がおかれており、なぜそうなるのかということをきちんと説明できる力が必要であり、同様の学習活動が考えられます。