1　不定積分

【定義】

関数$f(x)$の原始関数$F(x)$　：　xについて微分して$f(x)$になる関数のこと。$F'(x)=f(x)$

関数$f(x)$の不定積分　：　$\int f(x)\,dx=F(x)+C$　（Cは積分定数）

関数$f(x)$の不定積分を求めることを，$f(x)$を積分するという。

【公式】

nが正の整数または０のとき　$\int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+C$

【計算法則】

1　$\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$　（kは実数）

2　$\int\{f(x)+g(x)\}dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$

3　$\int\{f(x)-g(x)\}dx=\int f(x)dx-\int g(x)dx$

問１　次の不定積分を求めよ。

(1)　$\int(3x^2-6x+2)dx$

$=3\cdot\frac{1}{3}x^3-6\cdot\frac{1}{2}x^2+2\cdot x+C$

$=x^3-3x^2+2x+C$

(2)　$\int(x+1)(2x-1)dx$

$=\int(2x^2+x-1)\,dx$

$=2\cdot\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-x+C$

$=\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-x+C$

(3)　$\int t(3t+1)dt$

$=\int(3t^2+t)\,dt$

$=3\cdot\frac{1}{3}t^3+\frac{1}{2}t^2+C$

$\int dt$は，tの関数として積分することなので

$\int(2t+1)dt=t^2+t+C$

$\int(2x+1)dt=(2x+1)t+C$

（$2x+1$は定数とみなす）

となることに注意。

問２　次の２つの条件を満たす関数$F(x)$を求めよ。

$F'(x)=3(x-1)^2\cdots\cdots$①　　$F(1)=0\cdots\cdots$②

（解）①から

$F(x)=\int 3(x-1)^2dx$

$=\int(3x^2-6x+3)dx$

$=x^3-3x^2+3x+C$

②から

$F(1)=1-3+3+C=0$

$1+C=0$　であるから　$C=-1$

ゆえに　$F(x)=x^3-3x^2+3x-1$

2　定積分

【定義】

$F'(x)=f(x)$とするとき

関数$f(x)$のaからbまでの定積分　$\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$

【計算法則】

1　$\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$　（kは実数）

2　$\int_a^b\{f(x)+g(x)\}\,dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$

3　$\int_a^b\{f(x)-g(x)\}\,dx=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx$

【性質】

1　$\int_a^a f(x)dx=0$　　2　$\int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx$　　3　$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

4　$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$　$\left(\text{定積分}\int_a^x f(t)dt\text{を }x\text{ で微分すると }f(x)\text{ になる}\right)$

（４の説明）$F'(x)=f(x)$とすると$\int_a^x f(t)dt=[F(t)]_a^x=F(x)-F(a)$　　$F(a)$は定数

$$\left(\int_a^x f(t)dt\right)'=\big(F(x)-F(a)\big)'=\big(F(x)\big)'-\big(F(c)\big)'=F'(x)-0=f(x)$$

問１　次の定積分を求めよ。

(1) $\displaystyle\int_0^1(-x^2+3x)dx$

$\displaystyle=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2\right]_0^1$

$\displaystyle=-\frac{1}{3}\cdot 1^3+\frac{3}{2}\cdot 1^2-0$

$\displaystyle=-\frac{1}{3}+\frac{3}{2}=\frac{-2+9}{6}=\frac{7}{6}$

(2) $\displaystyle\int_{-1}^2(x+4)(x-2)dx$

$\displaystyle=\int_{-1}^2(x^2+2x-8)dx$

$\displaystyle=\left[\frac{1}{3}x^3+x^2-8x\right]_{-1}^2$

$\displaystyle=\left(\frac{1}{3}\cdot 2^3+2^2-8\cdot 2\right)$

$\displaystyle\qquad-\left\{\frac{1}{3}(-1)^3+(-1)^2-8(-1)\right\}$

$\displaystyle=\left(\frac{8}{3}-12\right)-\left(-\frac{1}{3}+9\right)$

$=-18$

(3) $\displaystyle\int_0^1(-x^2+3x)dx-\int_0^1(2x^2-x)dx$

$\displaystyle=\int_0^1\{(-x^2+3x)-(2x^2-x)\}dx$

$\displaystyle=\int_0^1(-3x^2+4x)dx$

$=[-x^3+2x^2]_0^1$

$=(-1^3+2\cdot 1^2)-0=1$

問２　等式　$\displaystyle f(x)=4x+3\int_0^1 f(t)dt$　を満たす関数$f(x)$を求めよ。

（解）

$\displaystyle\int_0^1 f(t)dt$ は定数であるから　$\displaystyle k=\int_0^1 f(t)dt$ ……①　とおくと　$f(x)=4x+3k$　……②　となる。

②より $f(t)=4t+3k$ を①に代入して　$\displaystyle k=\int_0^1 f(t)dt=\int_0^1(4t+3k)dt=[2t^2+3kt]_0^1=2+3k$

ゆえに　$k=2+3k$　となり　$k=-1$

②より　$f(x)=4x-3$

問３　等式　$\displaystyle\int_a^x f(t)dt=x^2-3x+2$　を満たす関数$f(x)$と定数aの値を求めよ。

（解）

等式の両辺をxで微分すると　$f(x)=2x-3$

与えられた等式で $x=a$ とすると $\displaystyle\int_a^a f(t)dt=a^2-3a+2$

左辺は０になるので　$a^2-3a+2=0$　　　$(a-1)(a-2)=0$　よって　$a=1,\ 2$

ゆえに　$f(x)=2x-3,\ a=1,\ 2$

3　定積分と図形の面積

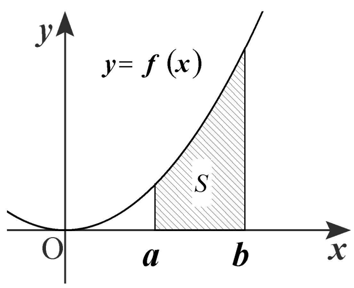
1　$a\leqq x\leqq b$の範囲で$f(x)\geqq 0$のとき
$y=f(x)$のグラフとx軸および２直線
$x=a,\ x=b$で囲まれた部分の面積Sは

$$S=\int_a^b f(x)dx$$

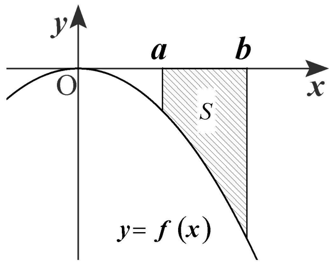
2　$a\leqq x\leqq b$の範囲で$f(x)\leqq 0$のとき
$y=f(x)$のグラフとx軸および２直線
$x=a,\ x=b$で囲まれた部分の面積Sは

$$S=\int_a^b\{-f(x)\}dx=-\int_a^b f(x)dx$$

$f(x)\geqq 0$ のとき

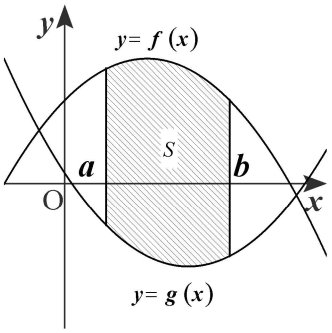


$f(x)\leqq 0$ のとき

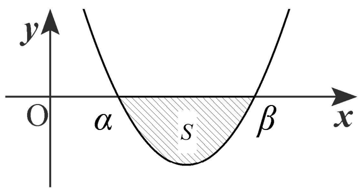


３　$a \leqq x \leqq b$の範囲で$f(x) \geqq g(x)$のとき
$y=f(x)$と$y=g(x)$のグラフおよび２直線
$x=a$，$x=b$で囲まれた部分の面積Sは

$$S=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$$



$y=(x-\alpha)(x-\beta)$



$$S=-\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx$$

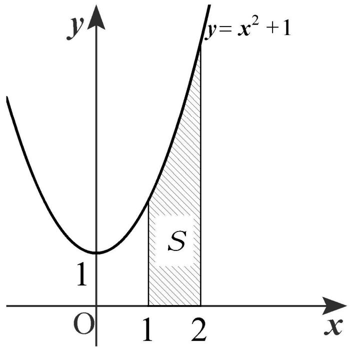
４　$\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$
面積を求める問題でこの公式が利用
できる場合がある。

問１　次の部分の面積Sを求めよ。

(1)　放物線$y=x^2+1$，直線$x=1$，$x=2$，x軸
で囲まれた部分。

（解）

$$S=\int_1^2 (x^2+1)dx=\left[\frac{1}{3}x^3+x\right]_1^2$$
$$=\left(\frac{1}{3}\cdot 2^3+2\right)-\left(\frac{1}{3}\cdot 1^3+1\right)$$
$$=\left(\frac{8}{3}+2\right)-\left(\frac{1}{3}+1\right)=\frac{10}{3}$$

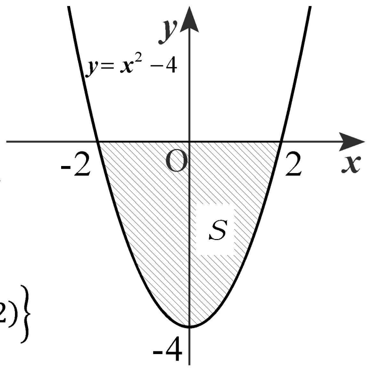


(2)　放物線$y=x^2-4$，x軸で囲まれた部分。

（解）

この放物線とx軸との共有点のx座標は
$x^2-4=0$ の解である。
$(x+2)(x-2)=0$　より　$x=-2$，2
区間 $-2 \leqq x \leqq 2$ では　$y \leqq 0$ であるから

$$S=\int_{-2}^2 \{-(x^2-4)\}dx=\left[-\frac{1}{3}x^3+4x\right]_{-2}^2$$
$$=\left(-\frac{1}{3}\cdot 2^3+4\cdot 2\right)-\left\{-\frac{1}{3}(-2)^3+4(-2)\right\}$$
$$=-\frac{8}{3}+8-\left(\frac{8}{3}-8\right)=\frac{32}{3}$$



公式４の利用

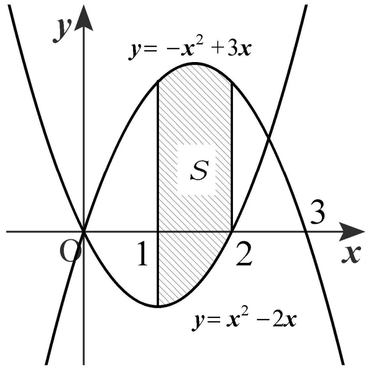
$$S=-\int_{-2}^2 (x^2-4)dx$$
$$=-\int_{-2}^2 (x+2)(x-2)dx$$
$$=-\left[-\frac{1}{6}\{2-(-2)\}^3\right]$$
$$=\frac{1}{6}\cdot 4^3=\frac{32}{3}$$

(3)　２つの放物線$y=x^2-2x$，$y=-x^2+3x$と
２直線$x=1$，$x=2$で囲まれた部分。

（解）

区間$1 \leqq x \leqq 2$では　$x^2-2x \leqq -x^2+3x$であるから

$$S=\int_1^2 \{(-x^2+3x)-(x^2-2x)\}dx$$
$$=\int_1^2 (-2x^2+5x)dx=\left[-\frac{2}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2\right]_1^2$$
$$=\left(-\frac{2}{3}\cdot 2^3+\frac{5}{2}\cdot 2^2\right)-\left(-\frac{2}{3}\cdot 1^3+\frac{5}{2}\cdot 1^2\right)$$
$$=-\frac{16}{3}+10-\left(-\frac{2}{3}+\frac{5}{2}\right)$$
$$=-\frac{14}{3}+10-\frac{5}{2}$$
$$=\frac{-28+60-15}{6}=\frac{17}{6}$$



問２　次の曲線または直線で囲まれた図形の面積Sを求めよ。

(1)　放物線$y=x^2-1$，直線$y=x+1$で囲まれた部分。

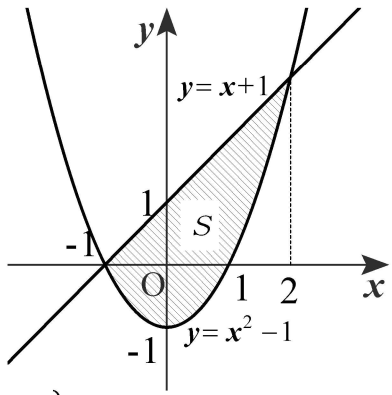
（解）

$x^2-1=x+1$　とすると　$x^2-x-2=0$

$(x+1)(x-2)=0$　より　$x=-1,\ 2$

求める面積Sは

$$S=\int_{-1}^{2}\{(x+1)-(x^2-1)\}dx$$
$$=\int_{-1}^{2}(-x^2+x+2)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x\right]_{-1}^{2}$$
$$=-\frac{1}{3}\cdot 2^3+\frac{1}{2}\cdot 2^2+2\cdot 2-\left\{-\frac{1}{3}(-1)^3+\frac{1}{2}(-1)^2+2(-1)\right\}$$
$$=-\frac{8}{3}+6-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-2\right)=5-\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$$



公式４の利用

$$S=\int_{-1}^{2}\{(x+1)-(x^2-1)\}dx$$
$$=\int_{-1}^{2}(-x^2+x+2)dx$$
$$=-\int_{-1}^{2}(x+1)(x-2)dx$$
$$=-\left[-\frac{1}{6}\{2-(-1)\}^3\right]$$
$$=\frac{1}{6}\cdot 3^3$$
$$=\frac{9}{2}$$

(2)　２つの放物線 $y=x^2-2x$，$y=-x^2+4$ で囲まれた部分。

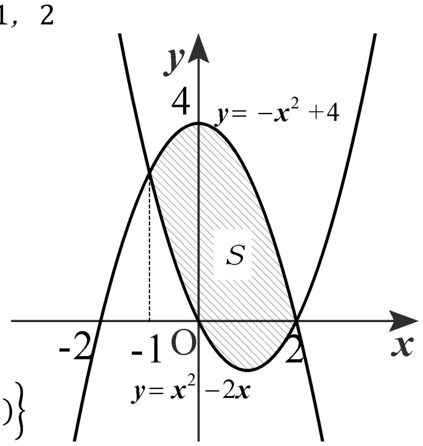
（解）

$x^2-2x=-x^2+4$ とすると整理して $x^2-x-2=0$

$(x+1)(x-2)=0$　ゆえに　$x=-1,\ 2$

求める面積Sは

$$S=\int_{-1}^{2}\{(-x^2+4)-(x^2-2x)\}dx$$
$$=\int_{-1}^{2}(-2x^2+2x+4)dx$$
$$=\left[-\frac{2}{3}x^3+x^2+4x\right]_{-1}^{2}$$
$$=-\frac{2}{3}\cdot 2^3+2^2+4\cdot 2-\left\{-\frac{2}{3}(-1)^3+(-1)^2+4(-1)\right\}$$
$$=-\frac{16}{3}+12-\left(\frac{2}{3}-3\right)=9$$



公式４の利用

$$S=\int_{-1}^{2}\{(-x^2+4)-(x^2-2x)\}dx$$
$$=\int_{-1}^{2}(-2x^2+2x+4)dx$$
$$=-2\int_{-1}^{2}(x+1)(x-2)dx$$
$$=-2\left[-\frac{1}{6}\{2-(-1)\}^3\right]$$
$$=\frac{2}{6}\cdot 3^3$$
$$=9$$

問３　曲線 $y=x^3+x^2-2x$ と x軸で囲まれた２つの部分の面積の和を求めよ。

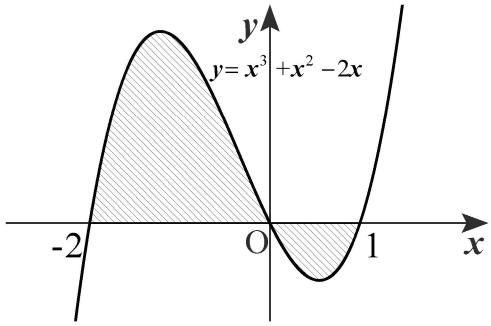
（解）

$x^3+x^2-2x=0$ とすると　因数分解して　$x(x+2)(x-1)=0$

ゆえに　$x=-2,\ 0,\ 1$　なので

求める面積の和は

$$\int_{-2}^{0}(x^3+x^2-2x)dx+\int_{0}^{1}\{-(x^3+x^2-2x)\}dx$$
$$=\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_{-2}^{0}+\left[-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_{0}^{1}$$
$$=0-\left\{\frac{1}{4}(-2)^4+\frac{1}{3}(-2)^3-(-2)^2\right\}+\left(-\frac{1}{4}\cdot 1^4-\frac{1}{3}\cdot 1^3+1^2\right)-0$$
$$=\frac{8}{3}-\frac{1}{4}-\frac{1}{3}+1=\frac{7}{3}-\frac{1}{4}+1=\frac{28-3+12}{12}=\frac{37}{12}$$



問４　定積分 $\int_0^3 |x(x-2)|dx$ を求めよ。

（解）

$f(x)=x(x-2)$とする

$x(x-2)=0$ とすると $x=0,\ 2$

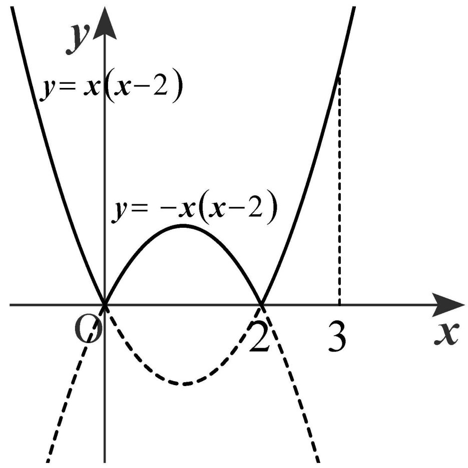
$0 \leqq x \leqq 2$ のとき $f(x) \leqq 0$ なので，$|f(x)|=-x(x-2)=-x^2+2x$

$2 \leqq x \leqq 3$ のとき $f(x) \geqq 0$ なので，$|f(x)|=x(x-2)=x^2-2x$

求める定積分は

$$\int_0^3 |x(x-2)|dx=\int_0^2(-x^2+2x)dx+\int_2^3(x^2-2x)dx$$
$$=\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^2+\left[\frac{1}{3}x^3-x^2\right]_2^3$$
$$=\left(-\frac{1}{3}\cdot 2^3+2^2\right)-0+\left(\frac{1}{3}\cdot 3^3-3^2\right)-\left(\frac{1}{3}\cdot 2^3-2^2\right)$$
$$=-\frac{8}{3}+4+0-\frac{8}{3}+4=-\frac{16}{3}+8=\frac{8}{3}$$

$y=|x(x-2)|$



参考　定積分の計算について

$F'(x)=f(x)$ のとき

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx=[F(x)]_\alpha^\beta=F(\beta)-F(\alpha)$$ であるが，

次のようにも計算できる。

$$\int_\alpha^\beta (ax^2+bx+c)dx$$
$$=a\int_\alpha^\beta x^2dx+b\int_\alpha^\beta xdx+c\int_\alpha^\beta dx$$
$$=a\left[\frac{1}{3}x^3\right]_\alpha^\beta+b\left[\frac{1}{2}x^2\right]_\alpha^\beta+c[x]_\alpha^\beta$$
$$=\frac{a}{3}[x^3]_\alpha^\beta+\frac{b}{2}[x^2]_\alpha^\beta+c[x]_\alpha^\beta$$
$$=\frac{a}{3}(\beta^3-\alpha^3)+\frac{b}{2}(\beta^2-\alpha^2)+c(\beta-\alpha)$$

この方法での計算が良い場合もある。

（例）

$$\int_{-1}^2 (x^2+3x+2)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-1}^2$$
$$=\frac{1}{3}\{2^3-(-1)^3\}+\frac{3}{2}\{2^2-(-1)^2\}+2\{2-(-1)\}$$
$$=\frac{9}{3}+\frac{9}{2}+2\cdot 3$$
$$=\frac{9}{2}+9$$
$$=\frac{27}{2}$$

公式　$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$

（証明）

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx$$
$$=\int_\alpha^\beta \{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)x^2+\alpha\beta x\right]_\alpha^\beta$$
$$=\frac{1}{3}(\beta^3-\alpha^3)-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)(\beta^2-\alpha^2)+\alpha\beta(\beta-\alpha)$$
$$=\frac{2}{6}(\beta-\alpha)(\beta^2+\beta\alpha+\alpha^2)-\frac{3}{6}(\beta-\alpha)(\beta+\alpha)^2+\frac{6}{6}\alpha\beta(\beta-\alpha)$$
$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)\{2(\beta^2+\beta\alpha+\alpha^2)-3(\beta+\alpha)^2+6\alpha\beta\}$$
$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)(-\beta^2+2\beta\alpha-\alpha^2)$$
$$=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

この公式は、2 つの曲線または直線で囲まれた図形の面積を求める場合に利用できる。

（この学習プリントでの該当箇所）

積分法（３）問１の(2)

積分法（４）問２の(1)(2)