1　極限値

【定義】
関数$f(x)$において，xがaと異なる値をとりながら限りなくaに近づくとき，
$f(x)$が一定の値 α に限りなく近づくならば
$x \to a$　のとき　$f(x) \to \alpha$　または　$\lim_{x\to a} f(x) = \alpha$　と書き
αをxがaに限りなく近づくときの$f(x)$の極限値という。

【極限値の求め方】
$f(a)$の値が存在するとき　⇒　$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$
$f(a)$の値が存在しないとき　⇒　$f(x)$を $x-a$ で約分したものを $g(x)$ とすると
$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = g(a)$

＜例＞

1　$f(x) = x+2$ のとき
$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}(x+2) = 3 = f(1)$

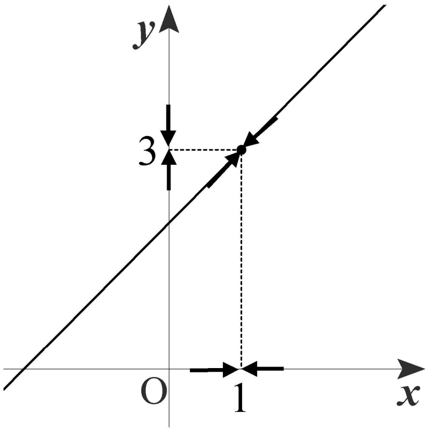
2　$f(x) = \dfrac{(x-1)(x+2)}{x-1}$ のとき

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+2)}{x-1}$$

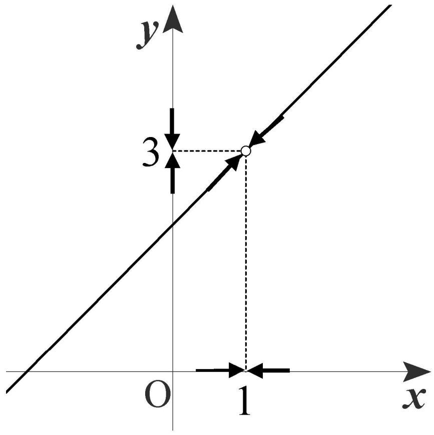
$$= \lim_{x\to 1}(x+2) = 3$$

$f(1)$の値は存在しない。

$y = x+2$



$y = \dfrac{(x-1)(x+2)}{x-1}$



問　次の極限値を求めよ。

(1)　$\lim_{x\to 1}(x^2+2x-1)$

(2)　$\lim_{x\to 2}\dfrac{2x-1}{x+1}$

(3)　$\lim_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x+1)}{x-3}$

(4)　$\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2-3x}{x}$

2　平均変化率・微分係数・導関数

【定義】　関数$f(x)$について

1　xがaから$a+h$まで変化するときの平均変化率は

$$\frac{y\text{の変化量}}{x\text{の変化量}} = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$
（直線ＡＢの傾き）

2　$x=a$における微分係数（変化率）は

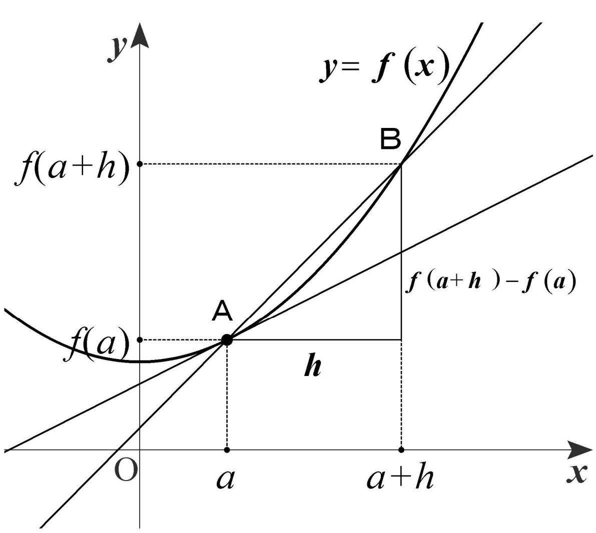
$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$
（点Ａにおける接線の傾き）

3　関数$f(x)$の導関数は

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

（xから接線の傾きを求めるための関数）

（注）関数 $y=f(x)$ の導関数を y'，$f'(x)$，$\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{d}{dx}f(x)$ などで表す。



問１　次の平均変化率を求めよ。

(1)　$f(x)=2x$ のxが 1 から 3 まで変わるとき　　(2)　$f(x)=x^2+x$ のxが 2 から 3 まで変わるとき

問２　関数 $f(x)=x^2$ の $x=2$ における微分係数を，定義に従って求めよ。

問３　関数 $f(x)=x^3$ の 導関数を，定義に従って求めよ。

問４　定数関数 $f(x)=5$ の 導関数を，定義に従って求めよ。

関数$f(x)$から導関数$f'(x)$を求めることを，$f(x)$をxで微分する，または単に微分するという。

【微分の公式】

nは正の整数，kは定数とする。

1　$(x^n)'=nx^{n-1}$，　$(\text{定数})'=0$　　　3　$y=f(x)+g(x)$を微分すると　$y'=f'(x)+g'(x)$

2　$y=kf(x)$を微分すると　$y'=kf'(x)$　　　4　$y=f(x)-g(x)$を微分すると　$y'=f'(x)-g'(x)$

問５　次の関数を微分せよ。

(1)　$y=3x^2-4x+2$　　(2)　$y=\dfrac{2}{3}x^3-\dfrac{5}{2}x^2+5x$　　(3)　$y=x(x+1)(x-2)$

問６　関数 $f(x)=-x^2+4x+1$ の $x=-1$ における微分係数を求めよ。

【いろいろな関数の導関数】

変数がx，y以外の文字で表される関数についても，同様に導関数を考える。

関数 $s=f(t)$のとき　導関数は　s'，$f'(t)$，$\dfrac{ds}{dt}$，$\dfrac{d}{dt}f(t)$で表される。

微分の公式は　$(t^n)'=nt^{n-1}$ となる。

問７　次の tの関数を微分せよ。ただし，a，b は定数とする。

(1)　$s=3t^2-4t+2$　　(2)　$f(t)=at^3+bt^2$

3　接線の方程式

【直線の方程式】

点$(x_1,\ y_1)$を通り、傾きが m の直線の方程式は　　$y-y_1=m(x-x_1)$ ……①

【接線の方程式】

関数 $y=f(x)$ のグラフ上の点$(a,\ f(a))$における接線の方程式は

接線の傾きが $f'(a)$であるので，$x_1=a$，$y_1=f(a)$，$m=f'(a)$ を①に代入して

$y-f(a)=f'(a)(x-a)$

問１　関数 $y=-2x^2+4x+1$ のグラフ上の点A$(2,\ 1)$における接線の方程式を求めよ。

問２　点A$(1,\ 0)$から曲線 $y=x^2+3$ に引いた接線の方程式を求めよ。

4　関数の増減と極大・極小

【関数のグラフの増減】　関数$f(x)$が，ある区間において

$f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$はその区間で**増加**　　　　$f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$はその区間で**減少**

【関数の極大・極小】　　関数$f(x)$が，$x=a$ を境目として

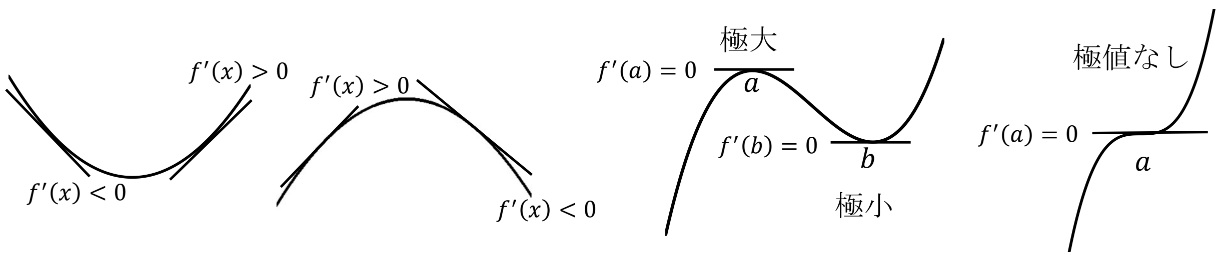
増加から減少に変わるとき　⇒　$f(x)$は$x=a$ で**極大**であるといい，$f(a)$を**極大値**という。

減少から増加に変わるとき　⇒　$f(x)$は $x=a$ で**極小**であるといい，$f(a)$を**極小値**という。

極大値と極小値をまとめて，**極値**という。

（注）関数$f(x)$が $x=a$で極値をとる　⇒　$f'(a)=0$

逆は成り立たない。$f'(a)=0$ であっても$f(x)$が$x=a$で極値をとるとは限らない。



問１　次の関数の増減を調べよ。

(1)　$f(x) = x^3 - 3x$

(2)　$f(x) = x^3$

問２　次の関数の増減を調べ，極値を求めよ。また，そのグラフをかけ。

(1)　$y = x^3 - 3x^2 + 3$

(2)　$y = x^4 - 2x^2$

問３　関数 $f(x)=x^3+ax+b$ が $x=2$ で極小値 -6 をとるように，定数 a，bの値を定めよ。
また，極大値を求めよ。

$\boxed{5}$ 関数の増減・グラフの応用

(1)　関数　$y=-x^3+3x^2$　$(-1 \leqq x \leqq 4)$ の最大値と最小値を求めよ。

(2)　1 辺の長さが 12cm の正方形の厚紙がある。この厚紙の四隅から 1 辺の長さが x cm の同じ大きさの正方形を切り取り，その残りを折り曲げてふたのない箱を作る。この箱の容積を最大にするには，切り取る正方形の 1 辺の長さを何 cm にすればよいか。

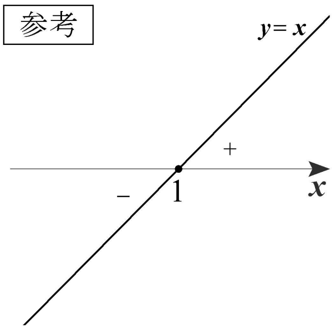
(3)　次の方程式の異なる実数解の個数を求めよ。

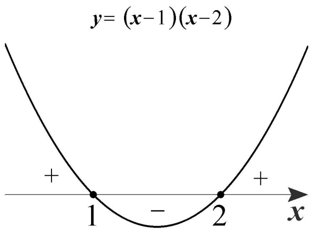
$$x^3-3x-1=0$$

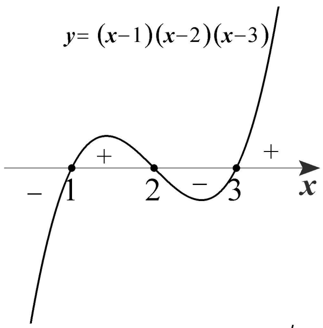
(4)　$x \geqq 0$ のとき，不等式 $x^3 + 4 \geqq 3x^2$ が成り立つことを証明せよ。
　また，等号が成り立つときの x の値を求めよ。

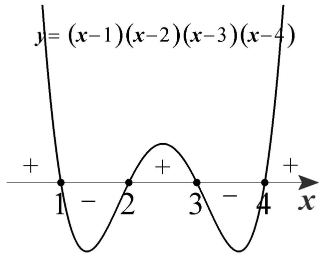
補充問題　3 次方程式 $x^3 - 3x - a = 0$ の異なる実数解の個数は，定数aの値によってどのように
　　変わるか調べよ。

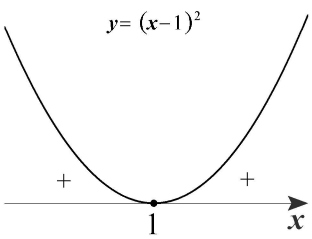
参考

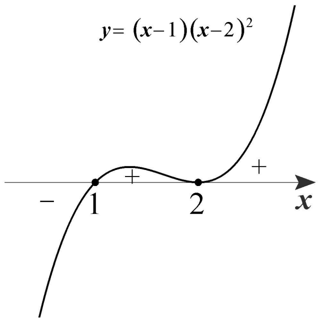


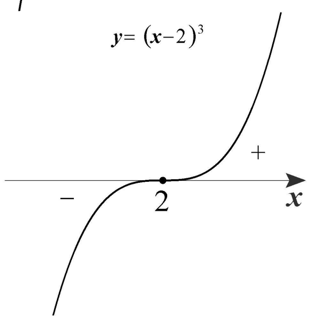












① $(x-1)(x-2) < 0$
　の解は，図より
　　$1 < x < 2$

② $(x-1)(x-2)(x-3) > 0$
　の解は，図より
　　$1 < x < 2$，$3 < x$

③ $(x-1)(x-2)^2 \geqq 0$
　の解は，図より
　　$1 \leqq x$