$\boxed{1}$　累乗根

【定義】

aを実数，nを正の整数とする。

aの n乗根 ： n乗してaになる数。つまり，方程式 $x^n = a$ の解である。

aの累乗根 ： aの 2 乗根，3 乗根，4 乗根，… の総称である。

問　次の累乗根を求めよ。

(1)　4 の 2 乗根（平方根）

(2)　-8 の 3 乗根

(3)　16 の 4 乗根

【累乗根のうち実数であるもの】　この章では、累乗根は実数の範囲で考えるものとする

aを実数，nを正の整数とする。

方程式 $x^n = a$ の実数解（n乗根）は，$y = x^n$のグラフと直線 $x = a$ の共有点のx座標である。

aのn乗根について，次のことが成り立つ。

1　n が奇数のとき

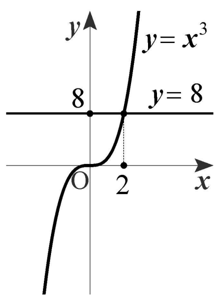
ただ１つ存在する ⇒ この数を $\sqrt[n]{a}$で表す

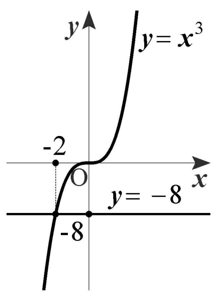
（例）

$x^3 = 8$ の実数解は　$2 = \sqrt[3]{8}$

$x^3 = 8$ の実数解は　$-2 = \sqrt[3]{-8}$

※　$\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8}$ が成り立つ





2　n が偶数のとき

$a > 0$ のとき，符号違いの 2 つが存在する

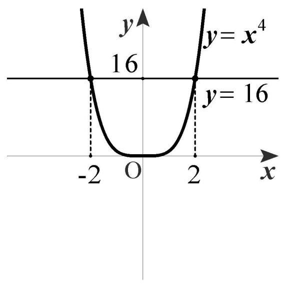
⟹ この 2 数を $\sqrt[n]{a}$，$-\sqrt[n]{a}$ で表す

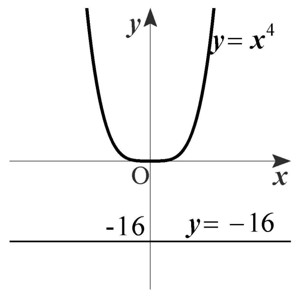
$a < 0$ のとき，存在しない

（例）

$x^4 = 16$ の実数解は　$2 = \sqrt[4]{16}$，$-2 = -\sqrt[4]{16}$

$x^4 = -16$ の実数解は　存在しない　$\left(\sqrt[4]{-16}\text{は存在しない}\right)$





問　次の値を求めよ。

(1)　$\sqrt[3]{27}$　　(2)　$\sqrt[3]{-125}$　　(3)　$\sqrt[4]{81}$　　(4)　$\sqrt[5]{32}$

【累乗根の定義から】

$a > 0$ で，nは正の整数とする。

$\sqrt[n]{a} > 0$，　$-\sqrt[n]{a} < 0$，　$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$，　$\sqrt[n]{a^n} = a$

【累乗根の性質】

$a > 0$，$b > 0$ で，m，n，p は正の整数とする。

1 $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$　　2 $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$　　3 $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$　　4 $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$　　5 $\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$

問　次の式を計算せよ。

(1)　$\sqrt[3]{4} \times \sqrt[3]{16}$

(2)　$\dfrac{\sqrt[6]{10}}{\sqrt[6]{2}}$

(3)　$\sqrt[3]{40}$

(4)　$\sqrt{\sqrt[3]{49}}$

2　指数法則

【定義】

指数が有理数のときにも指数法則が使えるように，次のように定める。

$a > 0$ で，m，n は正の整数，p は正の有理数とする。

$a^0 = 1$，　$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$，　$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$，　$a^{-p} = \dfrac{1}{a^p}$

【指数法則】

$a > 0$，$b > 0$ で，p，q は有理数とする。

1 $a^p \times a^q = a^{p+q}$　　2 $\dfrac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$　　3 $(a^p)^q = a^{pq}$　　4 $(ab)^p = a^p b^p$

問　次の式を計算せよ。

(1)　$5^{\frac{2}{3}} \times 5^{\frac{4}{3}}$

(2)　$\left(4^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$

(3)　$8^{\frac{1}{2}} \times 8^{\frac{1}{3}} \div 8^{\frac{1}{6}}$

(4)　$\sqrt{2} \times \sqrt[3]{2} \times \sqrt[6]{2}$

3　指数関数のグラフ

$a > 0$，$a \neq 1$ のとき，関数 $y = a^x$ を，aを底とする指数関数という。

1　定義域は実数全体。値域は正の実数全体。

2　グラフは点$(0,\ 1)$ および 点$(1,\ a)$を通り、x軸が漸近線となる。

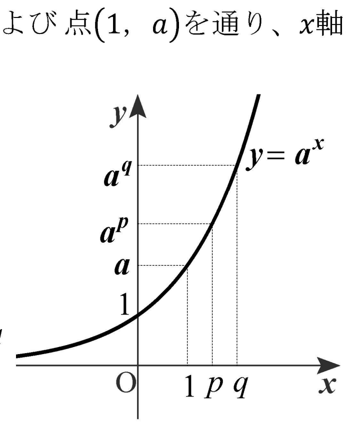
3　増加・減少について

(1)　$a > 1$ のとき

増加関数である

x の値が増加すると
y の値も増加する

$p < q$　⇔　$a^p < a^q$
（大小関係は同じ）

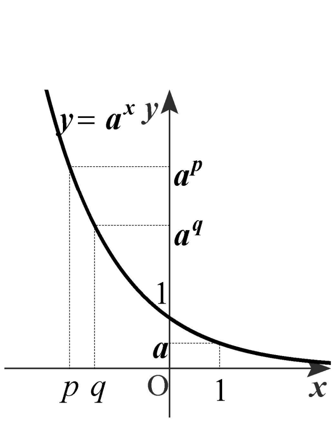


(2)　$0 < a < 1$ のとき

減少関数である

x の値が増加すると
y の値は減少する

$p < q$　⇔　$a^p > a^q$
（大小関係は逆）



4　相等関係　$a^p = a^q$　⇔　$p = q$

数学Ⅱ　第５章　指数関数と対数関数（３）　　　　　年　　組　　番・氏名

問１　次の関数のグラフをかけ。

(1)　$y=3^x$　　　　(2)　$y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$

問２　３つの数 $\sqrt{2}$，$\sqrt[3]{4}$，$\sqrt[5]{8}$ の大小を比較せよ。

問３　次の方程式を解け。

(1)　$8^x=4$　　　　(2)　$9^x=3^{x+1}$　　　　(3)　$4^x-3\cdot 2^x-4=0$

問４　次の不等式を解け。

(1)　$2^x \geqq 8$　　　　(3)　$9^x-4\cdot 3^x+3>0$

(2)　$\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1}<\left(\frac{1}{9}\right)^x$

数学Ⅱ　第５章　指数関数と対数関数（４）　　　　　年　　組　　番・氏名

4　対数

【定義】

$a>0$，$a\neq 1$，Mを正の実数とする。

$\log_a M$ ： aを底とするMの対数　（aを何乗するとMになるか？、その指数のこと）

Mを真数という。（ Mは正の実数 ）

（注）$\log_a M = p$ とすると，$a^p = M$　（$a^{\log_a M} = M$ また　$\log_a a^p = p$）

（注）$\log_a 1 = \log_a a^0 = 0$，$\log_a a = \log_a a^1 = 1$

【対数の性質】

$M>0$，$N>0$，kは実数とする。

１ $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$　　２ $\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$　　３ $\log_a M^k = k\log_a M$

【底の変換公式】

a，b，cは正の整数で，$a\neq 1$，$c\neq 1$ とするとき　$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

問１　次の式を $\log_a M = p$ の形にせよ。

(1)　$2^3 = 8$　⇒

(2)　$3^{-2} = \dfrac{1}{9}$　⇒

問２　次の式を $a^p = M$ の形にせよ。

(1)　$\log_3 81 = 4$　⇒

(2)　$\log_2 \dfrac{1}{16} = -4$　⇒

問３　次の値を求めよ。

(1) $\log_5 25$　　(2) $\log_3 \dfrac{1}{27}$　　(3) $\log_2 \sqrt[3]{2}$

問４　次の式を計算せよ。

(1) $\log_{10} 2 + \log_{10} 5$

(2) $\log_2 24 -$

(3) $2\log_3 4 + \log_3 5 - \log_3 8$

問５　次の式を簡単にせよ。（底の変換公式利用）

(1) $\log_2 3 \cdot \log_3 8$

(1) $\log_2 3 - \log_4 9$

3　対数関数のグラフ

$a>0$，$a\neq 1$ のとき，関数 $y=\log_a x$ を，aを底とする対数関数という。

１　定義域は正の実数全体。値域は実数全体。

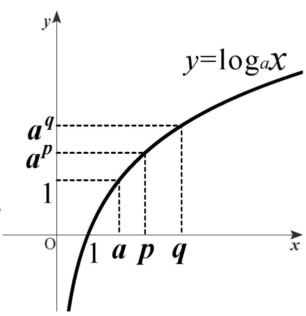
２　グラフは点$(1,\ 0)$ および 点$(a,\ 1)$を通り、y軸が漸近線となる。

３　増加・減少について

(1)　$a>1$ のとき

増加関数である
x の値が増加すると
y の値も増加する

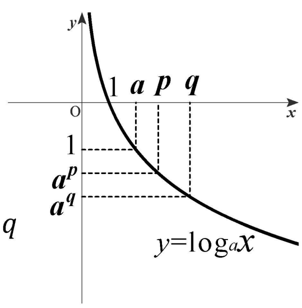
$0<p<q \Leftrightarrow \log_a p < \log_a q$
（大小関係は同じ）



(2)　$0<a<1$ のとき

減少関数である
x の値が増加すると
y の値は減少する

$0<p<q \Leftrightarrow \log_a p > \log_a q$
（大小関係は逆）



４　相等関係　$\log_a p = \log_a q$　⇔　$p = q$

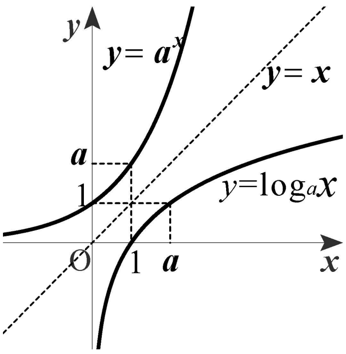
【指数関数と対数関数の関係】

指数関数 $y=a^x$ $\longrightarrow$ $x=\log_a y$ $\longrightarrow$ xとyを入れ替えて $\longrightarrow$ 対数関数 $y=\log_a x$

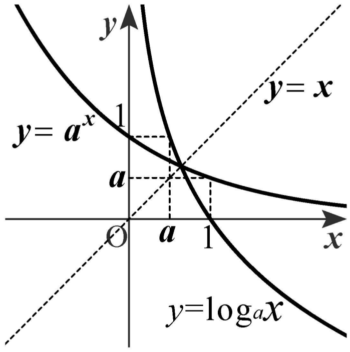
ゆえに，指数関数と対数関数は逆関数の関係である。

（注）この 2 つの関数のグラフは，直線 $y=x$ に関して対称である。

(1)　$a>1$ のとき



(2)　$0<a<1$ のとき



問１　次の関数のグラフをかけ。

(1)　$y=\log_3 x$

(2)　$y=\log_{\frac{1}{2}} x$

問２　次の 2 つの数の大小を不等号を用いて表せ。

$2\log_5 3$，　$3\log_5 2$

問３　次の方程式を解け。

(1)　$\log_2 x=3$

(2)　$\log_3 x+\log_3(x-8)=2$

※　方程式・不等式の問題では，必ず最初に真数条件（真数は正）を使うこと。

１　方程式の場合

$\log_a M+\log_a N$ ……① のとき
真数は正なので　$M>0$ かつ $N>0$

$\log_a MN$ ……② のとき
真数は正なので　$MN>0$　つまり
$M>0$ かつ $N>0$　または　$M<0$ かつ $N<0$

①と②では M，Nの条件が異なるので，$\log_a M+\log_a N$ を $\log_a MN$ に変形する前に必ず真数条件を使うこと。例えば $\log_4(-2)+\log_4(-8)$ は存在しないが，$\log_4(-2)(-8)=\log_4 16=2$ は存在する。

２　不等式の場合

$\log_3 x<\log_3 5$ のとき，真数条件を使わないと $x<5$ となり，xは負の数も含んでしまうので，必ず最初に真数条件を使う。

問４　次の不等式を解け。

(1)　$\log_2 x \leqq 3$

(2)　$\log_{\frac{1}{2}}(x-1) > 2$

(3)　不等式 $2\log_2(x-4) < \log_2 2x$

（

$\boxed{4}$　常用対数

【常用対数（10 を底とする対数）の利用】

1　Nがn桁の数　$\Leftrightarrow$　$n-1 \leqq \log_{10} N < n$

2　Nは小数第n位に初めて 0 でない数が現れる　$\Leftrightarrow$　$-n \leqq \log_{10} N < -(n-1)$

（１の説明）

1 桁	$1 \leqq N \leqq 9$	< 10	$10^0 \leqq N < 10^1$
2 桁	$10 \leqq N \leqq 99$	< 100	$10^1 \leqq N < 10^2$
3 桁	$100 \leqq N \leqq 999$	< 1000	$10^2 \leqq N < 10^3$
	⋮		⋮
n桁	………………………		$10^{n-1} \leqq N < 10^n$

（２の説明）

第 1 位	$0.1 \leqq N \leqq 0.99\cdots < 1$	$10^{-1} \leqq N < 10^0$
第 2 位	$0.01 \leqq N \leqq 0.09\cdots < 0.1$	$10^{-2} \leqq N < 10^{-1}$
第 3 位	$0.001 \leqq N \leqq 0.009\cdots < 0.01$	$10^{-3} \leqq N < 10^{-2}$
	⋮	⋮
第n位	………………………	$10^{-n} \leqq N < 10^{-(n-1)}$

問１　3^{20}は何桁の数か調べよ。
ただし、$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

問２　$\left(\frac{1}{2}\right)^{30}$ を小数で表したとき，小数第何位に初めて 0 でない数が現れるか。ただし、$\log_{10} 2 = 0.3010$ とする。

補充問題

$\log_{10} 2 = a$，$\log_{10} 3 = b$ のとき，次の式をa，bを用いて表せ。

(1)　$\log_{10} \sqrt[3]{6}$

(2)　$\log_{10} 15$

（