数学Ⅱ　第３章　図形と方程式（１）　　　　　　　　　　　　　年　　組　　番・氏名

1　直線上の点

1　2点A(a)、B(b) 間の距離ABは、AB $= |b-a|$　（注）絶対値 $|a| = \begin{cases} a & (a \geqq 0 \text{ のとき}) \\ -a & (a < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$

2　2点A(a)、B(b) を結ぶ線分ABを、$m:n$ に内分する点をP、外分する点をQとすると

内分点Pの座標は $\dfrac{na+mb}{m+n}$、　外分点Qの座標は $\dfrac{(-n)a+mb}{m+(-n)}$ または $\dfrac{na+(-m)b}{(-m)+n}$

問１　次の2点間の距離を求めよ。

(1) A(2)、B(5)　　(2) A(-2)、B(3)　　(3) A(a)、B$(3a)$

問２　2点A(3)、B(6)に対して、線分ABを $2:1$ に内分する点P、外分する点Qの座標を求めよ。

2　平面上の点

1　2点A$(x_1,\ y_1)$、B$(x_2,\ y_2)$ 間の距離ABは、AB $= \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

とくに、原点OとA$(x_1,\ y_1)$との距離OAは、OA $= \sqrt{x_1^2+y_1^2}$

2　2点A$(x_1,\ y_1)$、B$(x_2,\ y_2)$ を結ぶ線分ABを、$m:n$ に内分する点をP、外分する点をQとすると

P$\left(\dfrac{nx_1+mx_2}{m+n},\ \dfrac{ny_1+my_2}{m+n}\right)$

Q$\left(\dfrac{(-n)x_1+mx_2}{m+(-n)},\ \dfrac{(-n)y_1+my_2}{m+(-n)}\right)$　または　Q$\left(\dfrac{nx_1+(-m)x_2}{(-m)+n},\ \dfrac{ny_1+(-m)y_2}{(-m)+n}\right)$

とくに、線分ABの中点の座標は $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\ \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$

3　3点A$(x_1,\ y_1)$、B$(x_2,\ y_2)$、C$(x_3,\ y_3)$ を頂点とする△ABCの重心の座標は

$\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

問１　2点A$(2,\ -1)$、B$(4,\ 3)$ 間の距離を求めよ。

問２　2点A$(-1,\ 6)$、B$(4,\ 1)$ を結ぶ線分ABについて、次の点の座標を求めよ。

(1)　$3:2$ に内分する点P　　　　(1)　$5:2$ に外分する点Q

問３　3点A$(1,\ 1)$、B$(5,\ 2)$、C$(3,\ 4)$ を頂点とする△ABCの重心の座標を求めよ。

3　直線の方程式

【直線の方程式の形】

1　標準的な形（傾きが見える）

$y = mx + n$　(傾きが m、y切片が n)　または　$x = x_1$　(傾きなし、x軸に垂直、x切片がx_1)

2　一般的な形（傾きがあってもなくても表現できる）

$ax + by + c = 0$

【直線の方程式を求める公式】

1　点$(x_1,\ y_1)$を通り、傾きが m の直線の方程式は　$y - y_1 = m(x - x_1)$

2　点$(x_1,\ y_1)$を通り、x軸に垂直な直線の方程式は　$x = x_1$

3　異なる２点 $(x_1,\ y_1)$、$(x_2,\ y_2)$ を通る直線の方程式は

$x_1 \neq x_2$とき　$y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$　　（注）$\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ は直線の傾き

$x_1 = x_2$とき　$x = x_1$　（x軸に垂直な直線）

4　x切片が a、y切片が b である直線の方程式は　$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$

問　次のような直線の方程式を求めよ。

(1)　点$(1,\ 3)$を通り、傾きが 2

(2)　2 点$(1,\ 2)$、$(3,\ -4)$を通る　　(3)　2 点$(3,\ -1)$、$(3,\ 4)$を通る　　(4)　x切片が 3、y切片が 2

4　2 直線の平行・垂直

【平行・垂直条件】

1〈標準的な形〉　異なる 2 直線 $y = m_1x + k_1$、$y = m_2x + k_2$ について

2 直線が平行 $\Leftrightarrow$ $m_1 = m_2$

2 直線が垂直 $\Leftrightarrow$ $m_1m_2 = -1$

2〈一般的な形〉　異なる 2 直線 $a_1x + b_1y + c_1 = 0$、$a_2x + b_2y + c_2 = 0$ について

2 直線が平行 $\Leftrightarrow a_1b_2 = a_2b_1$　……傾きが等しい　$-\dfrac{a_1}{b_1} = -\dfrac{a_2}{b_2}$

2 直線が垂直 $\Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 = 0$　……傾きの積が -1　$\left(-\dfrac{a_1}{b_1}\right)\left(-\dfrac{a_2}{b_2}\right) = -1$

【平行・垂直な直線】

1〈標準的な形〉　点$(x_1,\ y_1)$を通り、直線 $y = mx + k$ に対して

平行な直線は　$y - y_1 = m(x - x_1)$　　垂直な直線は　$y - y_1 = -\dfrac{1}{m}(x - x_1)$

2〈一般的な形〉　点$(x_1,\ y_1)$を通り、直線 $ax + by + c = 0$ に対して

平行な直線は　$a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$

垂直な直線は　$b(x - x_1) - a(y - y_1) = 0$　または　$-b(x - x_1) + a(y - y_1) = 0$

【直線に関して対称な点】

2 点Ａ，Ｂが直線 ℓ に関して対称であるのは、次の[1]、[2]が成り立つときである。

[1]　直線ＡＢは ℓ に垂直である　　[2]線分ＡＢの中点は ℓ 上にある

（注）直線 ℓ は、線分ＡＢの垂直二等分線である。

問１　点$(2,\ 1)$を通り、直線ℓ：$2x+3y+4=0$に平行な直線、垂直な直線の方程式をそれぞれ求めよ。

（解１）

（解２）

問２　直線$2x-y-1=0$をℓとする。直線ℓに関して点A$(0,\ 4)$と対称な点Bの座標を求めよ。

$\boxed{5}$　点と直線との距離

点$(x_1,\ y_1)$と直線$ax+by+c=0$との距離dは　$d=\dfrac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

問　点$(1,\ -2)$と直線 $3x+4y+4=0$の距離dを求めよ。

$\boxed{6}$　２直線の交点を通る直線の方程式

2 直線$a_1x+b_1y+c_1=0$、$a_2x+b_2y+c_2=0$の交点を通る直線の方程式は
　kを定数として　　$(a_1x+b_1y+c_1)+k(a_2x+b_2y+c_2)=0$　　で表される

問　2 直線$x-y-1=0$，$x+2y-4=0$の交点と、点$(0,\ 3)$を通る直線の方程式を求めよ。

7　円の方程式

1	〈標準的な形〉	$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$	中心の座標 $(a,\ b)$，半径 r
		$x^2+y^2=r^2$	中心が原点，半径 r
2	〈一般的な形〉	$x^2+y^2+lx+my+n=0$	

問１　次のような円の方程式を求めよ。

(1)　中心が点$(4,\ -3)$，半径が 5

(2)　2 点 A$(3,\ 4)$，B$(-1,\ 2)$ を直径の両端とする

問２　方程式　$x^2+y^2-6x+2y-6=0$　はどのような図形を表すか。

問３　3 点 A$(2,\ 4)$，B$(2,\ 0)$，C$(-1,\ 3)$ を通る円の方程式を求めよ。

8　円と直線の共有点

問　次の円と直線の共有点の座標を求めよ。

(1)　$x^2+y^2=5$，$y=x-1$

(2)　$x^2+y^2=5$，$2x-y+5=0$

9　円と直線の位置関係

【2 次方程式の判別式を利用】
共有点の座標を求めるとき、円の方程式と直線の方程式から y を消去して得られる x の 2 次方程式を
$ax^2+bx+c=0$……① とする。判別式をDとすると、$D=b^2-4ac$
方程式①が実数解をもつとき、円と直線は共有点をもつ。実数解をもたないときは、共有点をもたない。
したがって、判別式Dを用いると、円と直線の位置関係は次のようになる。
$D>0$　⇔　異なる 2 点で交わる（方程式①は異なる 2 つの実数解をもつ）
$D=0$　⇔　接する　　　　　　（方程式①は重解をもつ、1 つの実数解）
$D<0$　⇔　共有点をもたない　（方程式①は異なる 2 つの虚数解をもつ、実数解はもたない）

【円の中心と直線の距離を利用】
半径が r の円の中心と、直線 ℓ との距離を d とする。
d と r の大小関係を用いると、円と直線の位置関係は次のようになる。
$d<r$　⇔　異なる 2 点で交わる
$d=r$　⇔　接する
$d>r$　⇔　共有点をもたない

問１　円 $x^2+y^2=8$ と直線 $y=x+m$ が共有点をもつとき、定数 m の値の範囲を求めよ。

問２　半径 r の円 $x^2+y^2=r^2$ と直線 $3x+4y-10=0$ が接するとき、r の値を求めよ。

10　円の接線の方程式

円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ における接線の方程式は　$px+qy=r^2$

問　点 $\mathrm{A}(1,\ 3)$から円 $x^2+y^2=5$ に引いた接線の方程式と接点の座標を求めよ。

11　２つの円の位置関係

2 つの円の中心をＣ，Ｃ$'$、半径をr，r'とし、中心間の距離ＣＣ$'$をdとする。ただし、$r > r'$とする。
このとき 2 つの円の位置関係は次のようになる。

1	$d > r + r'$	$\Leftrightarrow$	一方が他方の外部にある
2	$d = r + r'$	$\Leftrightarrow$	外接する（1 点を共有する）
3	$r - r' < d < r + r'$	$\Leftrightarrow$	2 点で交わる
4	$d = r - r'$	$\Leftrightarrow$	内接する（1 点を共有する）
5	$d < r - r'$	$\Leftrightarrow$	一方が他方の内部にある

問　中心が点$(4,\ 3)$で、円$x^2 + y^2 = 1$に外接する円の方程式を求めよ。

12　軌跡と方程式

【軌跡の求め方】
手順１　条件を満たす点Ｐの座標を$(x,\ y)$とする。
手順２　問題で与えられた点Ｐに関する条件をx，yの式で表す。
手順３　手順２で求めた式を整理し、この方程式が表す図形が何かを調べる。
手順４　逆に、手順３で求めた図形上のすべての点Ｐが、与えられた条件を満たすかどうかを調べる。

問１　2 点Ａ$(0,\ 2)$、Ｂ$(4,\ 0)$に対して、ＡＰ＝ＢＰを満たす点Ｐの軌跡を求めよ。

問２　原点Ｏからの距離と点Ａ$(3,\ 0)$からの距離の比が$2:1$である点Ｐの軌跡を求めよ。

問３　点Ｑが円 $x^2+y^2=2^2$ 上を動くとき、点Ａ$(4,\ 0)$と点Ｑを結ぶ線分ＡＱの中点Ｐの軌跡を求めよ。

$\boxed{13}$　不等式の表す領域

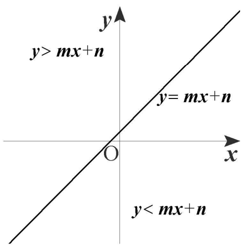
【直線と領域】

１　境界線が傾きのある直線のとき

直線 $y=mx+n$ を ℓ とする。

①　不等式 $y>mx+n$ の表す領域　⇒　直線 ℓ の上側の部分

②　不等式 $y<mx+n$ の表す領域　⇒　直線 ℓ の下側の部分

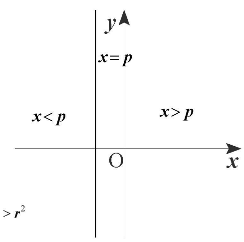


２　境界線が傾きのない直線のとき（x軸に垂直）

直線 $x=p$ を ℓ とする。

①　不等式 $x>p$ の表す領域　⇒　直線 ℓ の右側の部分

②　不等式 $x<p$ の表す領域　⇒　直線 ℓ の左側の部分

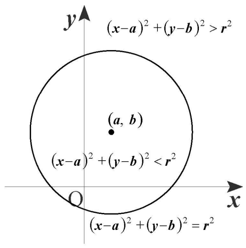


３　境界線が円のとき

円 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ をＣとする。

①　不等式 $(x-a)^2+(y-b)^2>r^2$ の表す領域　⇒円Ｃの外部

②　不等式 $(x-a)^2+(y-b)^2<r^2$ の表す領域　⇒円Ｃの内部



問１　次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1)　$y>-x+2$

(2)　$2x-y+3\geqq 0$

(3)　$x<2$

(4)　$x+2\geqq 0$

(5)　$x^2 + y^2 > 4$

(6)　$x^2 + y^2 \leqq 9$

(7)　$(x-2)^2 + y^2 \leqq 4$

(8)　$(x-1)^2 + (y-3)^2 > 9$

問２　次の連立不等式の表す領域を図示せよ。

(1)　$\begin{cases} x + y - 2 > 0 \\ x - y < 0 \end{cases}$

(2)　$\begin{cases} x^2 + y^2 < 25 \\ 2x + y < 4 \end{cases}$

問３　次の不等式の表す領域を図示せよ。

$$(x-y)(x+y-1) < 0$$

問４　x、yが４つの不等式

$$x \geqq 0、y \geqq 0、2x + y \leqq 8、2x + 3y \leqq 12$$

を同時に満たすとき、$x + y$ の最大値、最小値を求めよ。

問５　次の不等式を表す領域を求めよ。

(1)　$1 \leqq x + y \leqq 3$

(2)　$4 \leqq x^2 + y^2 \leqq 9$