1　極限値

【定義】

関数$f(x)$において，xがaと異なる値をとりながら限りなくaに近づくとき，
$f(x)$が一定の値 α に限りなく近づくならば
$x \to a$　のとき　$f(x) \to \alpha$　または　$\lim_{x \to a} f(x) = \alpha$　と書き
αをxがaに限りなく近づくときの$f(x)$の極限値という。

【極限値の求め方】

$f(a)$の値が存在するとき　⇒　$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

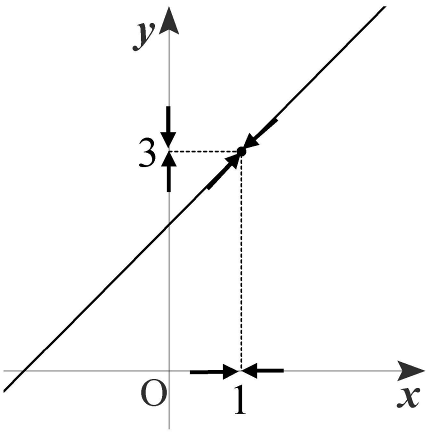
$f(a)$の値が存在しないとき　⇒　$f(x)$を $x - a$ で約分したものを $g(x)$ とすると
$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = g(a)$

＜例＞

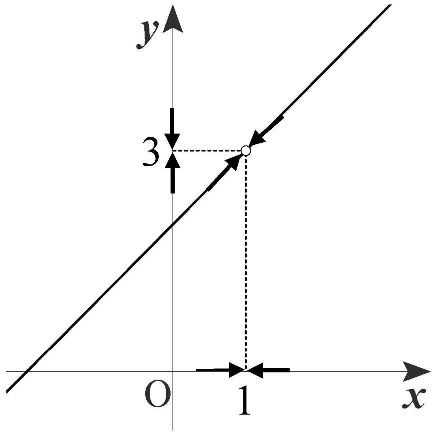
1　$f(x) = x + 2$ のとき
$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1}(x + 2) = 3 = f(1)$

2　$f(x) = \dfrac{(x-1)(x+2)}{x-1}$ のとき
$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} \dfrac{(x-1)(x+2)}{x-1}$
$= \lim_{x \to 1}(x + 2) = 3$
$f(1)$の値は存在しない。

$y = x + 2$



$y = \dfrac{(x-1)(x+2)}{x-1}$



問　次の極限値を求めよ。

(1)　$\lim_{x \to 1}(x^2 + 2x - 1) = 1^2 + 2 \cdot 1 - 1 = 2$

(2)　$\lim_{x \to 2} \dfrac{2x - 1}{x + 1} = \dfrac{2 \cdot 2 - 1}{2 + 1} = \dfrac{3}{3} = 1$

(3)　$\lim_{x \to 3} \dfrac{(x-3)(x+1)}{x-3} = \lim_{x \to 3}(x + 1) = 3 + 1 = 4$

(4)　$\lim_{x \to 0} \dfrac{x^2 - 3x}{x} = \lim_{x \to 0}(x - 3) = -3$

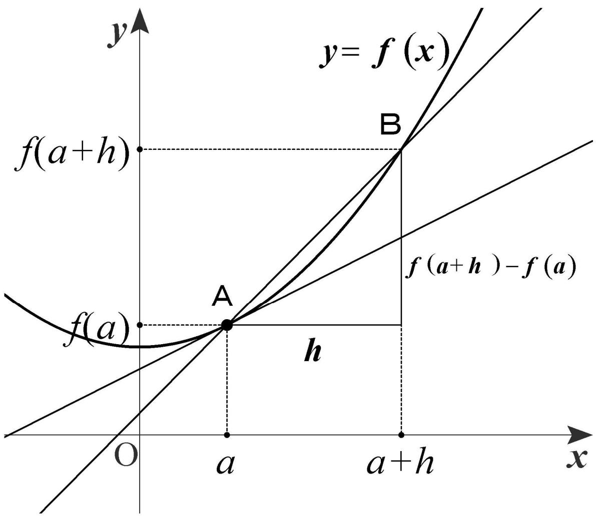
2　平均変化率・微分係数・導関数

【定義】　関数$f(x)$について

1　xがaから$a + h$ まで変化するときの平均変化率は
$\dfrac{y\text{の変化量}}{x\text{の変化量}} = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$　（直線ＡＢの傾き）

2　$x = a$における微分係数（変化率）は
$f'(a) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$　（点Ａにおける接線の傾き）

3　関数$f(x)$の導関数は
$f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$
（xから接線の傾きを求めるための関数）



（注）関数 $y = f(x)$ の導関数を y'，$f'(x)$，$\dfrac{dy}{dx}$，$\dfrac{d}{dx}f(x)$ などで表す。

問１　次の平均変化率を求めよ。

(1)　$f(x)=2x$ のxが 1 から 3 まで変わるとき

（解）

$$\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{6-2}{2}=2$$

(2)　$f(x)=x^2+x$ のxが 2 から 3 まで変わるとき

（解）

$$\frac{f(3)-f(2)}{3-2}=\frac{(3^2+3)-(2^2+2)}{2}=\frac{6}{2}=3$$

問２　関数 $f(x)=x^2$ の $x=2$ における微分係数を，定義に従って求めよ。

（解）

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(2+h)^2-2^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{4h+h^2}{h}=\lim_{h\to 0}(4+h)=4$$

問３　関数 $f(x)=x^3$ の 導関数を，定義に従って求めよ。

（解）

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3hx^2+3h^2x+h^3}{h}=\lim_{h\to 0}(3x^2+3hx+h^2)=3x^2$$

問４　定数関数 $f(x)=5$ の 導関数を，定義に従って求めよ。

（解）

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{5-5}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=\lim_{h\to 0}(0)=0$$

関数$f(x)$から導関数$f'(x)$を求めることを，$f(x)$をxで微分する，または単に微分するという。

【微分の公式】

nは正の整数，kは定数とする。

1　$(x^n)'=nx^{n-1}$,　$(\text{定数})'=0$

2　$y=kf(x)$を微分すると　$y'=kf'(x)$

3　$y=f(x)+g(x)$を微分すると　$y'=f'(x)+g'(x)$

4　$y=f(x)-g(x)$を微分すると　$y'=f'(x)-g'(x)$

問５　次の関数を微分せよ。

(1)　$y=3x^2-4x+2$

（解）

$$\begin{aligned} y'&=3(x^2)'-4(x)'+(2)'\\ &=3\cdot 2x-4\cdot 1+0\\ &=6x-4 \end{aligned}$$

(2)　$y=\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+5x$

（解）

$$\begin{aligned} y'&=\frac{2}{3}(x^3)'-\frac{5}{2}(x^2)'+5(x)'\\ &=\frac{2}{3}\cdot 3x^2-\frac{5}{2}\cdot 2x+5\cdot 1\\ &=2x^2-5x+5 \end{aligned}$$

(3)　$y=x(x+1)(x-2)$

（解）

$$\begin{aligned} y&=x(x^2-x-2)\\ &=x^3-x^2-2x\\ y'&=3x^2-2x-2 \end{aligned}$$

問６　関数 $f(x)=-x^2+4x+1$ の $x=-1$ における微分係数を求めよ。

（解）

$f'(x)=-2x+4$ より　$f'(-1)=-2(-1)+4=6$

【いろいろな関数の導関数】

変数がx，y以外の文字で表される関数についても，同様に導関数を考える。

関数 $s=f(t)$のとき　導関数は　s'，$f'(t)$，$\frac{ds}{dt}$，$\frac{d}{dt}f(t)$で表される。

微分の公式は　$(t^n)'=nt^{n-1}$ となる。

問７　次の tの関数を微分せよ。ただし，a，b は定数とする。

(1)　$s=3t^2-4t+2$

（解）

$$\begin{aligned} s'&=3(t^2)'-4(t)'+(2)'\\ &=3\cdot 2t-4\cdot 1+0\\ &=6t-4 \end{aligned}$$

(2)　$f(t)=at^3+bt^2$

（解）

$$\begin{aligned} f'(x)&=a(t^3)'+b(t^2)'\\ &=a\cdot 3t^2+b\cdot 2t\\ &=3at^2+2bt \end{aligned}$$

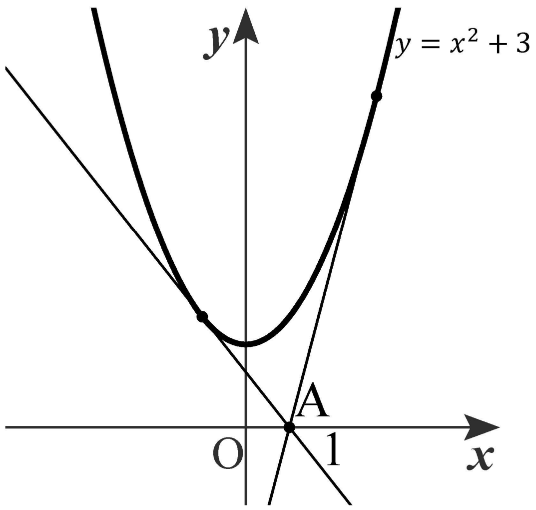
3　接線の方程式

【直線の方程式】
点$(x_1,\ y_1)$を通り、傾きが m の直線の方程式は　　$y-y_1=m(x-x_1)$ ……①

【接線の方程式】
関数 $y=f(x)$ のグラフ上の点$\big(a,\ f(a)\big)$における接線の方程式は
接線の傾きが $f'(a)$であるので，$x_1=a$，$y_1=f(a)$，$m=f'(a)$ を①に代入して
$y-f(a)=f'(a)(x-a)$

問１　関数 $y=-2x^2+4x+1$ のグラフ上の点A$(2,\ 1)$における接線の方程式を求めよ。
（解）
$f(x)=-2x^2+4x+1$ とおくと　$f'(x)=-4x+4$
$f'(2)=-4\cdot2+4=-4$
求める接線の方程式は　$y-1=-4(x-2)$
ゆえに　$y=-4x+9$

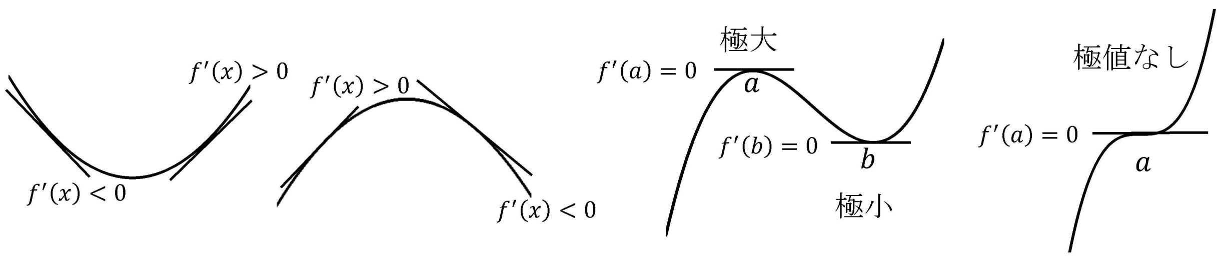
問２　点A$(1,\ 0)$から曲線 $y=x^2+3$ に引いた接線の方程式を求めよ。
（解）
接点の座標を$(a,\ a^2+3)$とする。
$y'=2x$ より接線の傾きは $2a$となる。
接線の方程式は　$y-(a^2+3)=2a(x-a)$
整理して　$y=2ax-a^2+3$ ……①
この直線が点A$(1,\ 0)$を通るので
①に代入して　$0=2a-a^2+3$
整理して　$a^2-2a-3=0$
$(a+1)(a-3)=0$ より　$a=-1,\ 3$
求める直線は①より
$a=-1$ のとき　$y=-2x+2$
$a=3$ のとき　$y=6x-6$
ゆえに　$y=-2x+2,\ y=6x-6$



4　関数の増減と極大・極小

【関数のグラフの増減】　関数$f(x)$が，ある区間において
$f'(x)>0 \Rightarrow f(x)$はその区間で**増加**　　　　$f'(x)<0 \Rightarrow f(x)$はその区間で**減少**

【関数の極大・極小】　関数$f(x)$が，$x=a$ を境目として
増加から減少に変わるとき　⇒　$f(x)$は$x=a$ で**極大**であるといい，$f(a)$を**極大値**という。
減少から増加に変わるとき　⇒　$f(x)$は $x=a$ で**極小**であるといい，$f(a)$を**極小値**という。
極大値と極小値をまとめて，**極値**という。
（注）関数$f(x)$が $x=a$で極値をとる　⇒　$f'(a)=0$
逆は成り立たない。$f'(a)=0$ であっても$f(x)$が$x=a$で極値をとるとは限らない。



問１　次の関数の増減を調べよ。

(1)　$f(x)=x^3-3x$

（解）

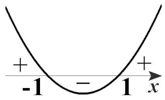
$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$ とすると $x=-1,\ 1$

$f'(x)>0$ の解は　$x<-1,\ 1<x$

$f'(x)<0$ の解は $-1<x<1$

よって，$f(x)$の増減表は次のようになる。



x	……	-1	……	1	……
$f'(x)$	＋	0	－	0	＋
$f(x)$	↗	2	↘	-2	↗

したがって，関数$f(x)$は

$x\leqq -1,\ 1\leqq x$で増加し，$-1\leqq x\leqq 1$ で減少する。

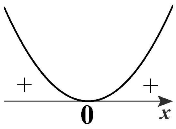
(2)　$f(x)=x^3$

（解）

$f'(x)=3x^2$

$f'(x)=0$ とすると $x=0$

常に$f'(x)\geqq 0$



x	……	0	……
$f'(x)$	＋	0	＋
$f(x)$	↗	0	↗

よって，$f(x)$は常に増加する。

問２　次の関数の増減を調べ，極値を求めよ。また，そのグラフをかけ。

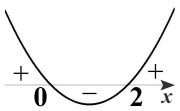
(1)　$y=x^3-3x^2+3$

（解）

$y'=3x^2-6x=3x(x-2)$

$y'=0$ とすると $x=0,\ 2$

yの増減表は次のようになる。

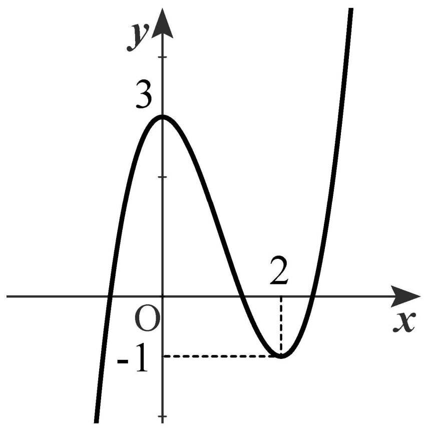


x	……	0	……	2	……
$f'(x)$	＋	0	－	0	＋
$f(x)$	↗	3	↘	-1	↗
		極大		極小	

したがって，この関数は

$x=0$ で極大値 3，$x=2$ で極小値 -1 をとる。

また，グラフは右の図のようになる。



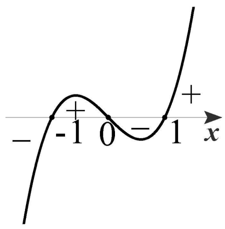
(2)　$y=x^4-2x^2$

（解）

$y'=4x^3-4x=4x(x+1)(x-1)$

$y'=0$ とすると $x=0,\ -1,\ 1$

yの増減表は次のようになる。

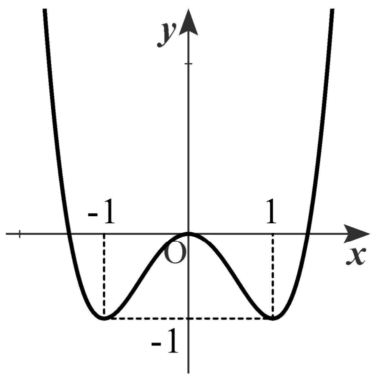


x	……	-1	……	0	……	1	……
y'	－	0	＋	0	－	0	＋
y	↘	-1	↗	0	↘	-1	↗
		極小		極大		極小	

したがって，この関数は

$x=0$ で極大値 0，$x=\pm1$ で極小値 -1 をとる。

また，グラフは右の図のようになる。



問３　関数 $f(x)=x^3+ax+b$ が $x=2$ で極小値 -6 をとるように，定数 a，bの値を定めよ。
また，極大値を求めよ。

（解）

$f'(x)=3x^2+a$

$f(x)$が$x=2$ で極小値 -6 をとるので

$f'(2)=0$，$f(2)=-6$　である。

よって　$12+a=0\cdots\cdots$①

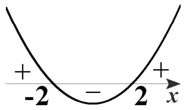
$8+2a+b=-6\cdots\cdots$②

①，②を解いて　$a=-12$，$b=10$

$f(x)=x^3-12x+10$

$f'(x)=3x^2-12=3(x+2)(x-2)$

$f'(x)=0$ とすると　$x=-2$，2



$f(x)$の増減表は次のようになる。

x	……	-2	……	2	……
$f'(x)$	＋	0	−	0	＋
$f(x)$	↗	26	↘	-6	↗
		極大		極小	

したがって，確かに$x=2$ で極小値 -6 をとる。

ゆえに　$a=-12$，$b=10$

$x=-2$ で極大値 26 をとる。

5　関数の増減・グラフの応用

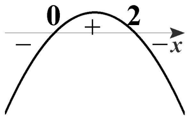
(1)　関数　$y=-x^3+3x^2$　$(-1\leqq x\leqq 4)$ の最大値と最小値を求めよ。

（解）

$y'=-3x^2+6x=-3x(x-2)$

$y'=0$ とすると $x=0$，2

yの増減表は次のようになる。



x	-1	……	0	……	2	……	4
y'		−	0	＋	0	−	
y	4	↘	0	↗	4	↘	-16

よって，この関数は

$x=-1$，2 で最大値 4 をとり，

$x=4$ で最小値 -16 をとる

(2)　１辺の長さが 12cm の正方形の厚紙がある。この厚紙の四隅から１辺の長さが x cm の同じ大きさの正方形を切り取り，その残りを折り曲げてふたのない箱を作る。この箱の容積を最大にするには，切り取る正方形の１辺の長さを何 cm にすればよいか。

（解）

箱の底面の１辺の長さは $(12-2x)$cm であるから，

xのとりうる値の範囲は，$x>0$，$12-2x>0$ であるから

共通範囲を求めて　$0<x<6\cdots\cdots$①

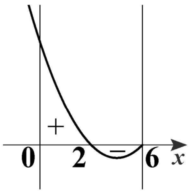
箱の容積を y cm^{3}とすると

$y=(12-2x)^2x=4(x^3-12x^2+36x)$

$y'=4(3x^2-24x+36)=12(x^2-8x+12)$

$=12(x-2)(x-6)$

$y'=0$ とすると　$x=2$，6



yの増減表は次のようになる。

x	0	……	2	……	6
y'		＋	0	−	
y		↗	128	↘	
			極大		

よって，$x=2$ のときyは最大となる。

すなわち，切り取る正方形の１辺の長さを 2cm にすればよい。

(3)　次の方程式の異なる実数解の個数を求めよ。

$$x^3-3x-1=0$$

方程式 $x^3-3x-1=0$ の実数解は，
$y=x^3-3x-1$ のグラフと直線 $x=0$（x軸）との共有点のx座標である。

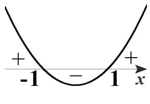
（解）

$y=x^3-3x-1$　とすると

$y'=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

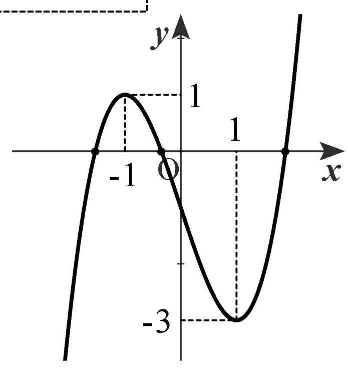
$y'=0$ とすると $x=-1$，1

yの増減表は次のようになる。



x	……	-1	……	1	……
y'	＋	0	−	0	＋
y	↗	1	↘	-3	↗

この関数のグラフは右図のようになり，グラフと x 軸は異なる３点で交わる。したがって，方程式 $x^3-3x-1=0$ の異なる実数解の個数は３個である。



(4)　$x \geqq 0$ のとき，不等式 $x^3+4 \geqq 3x^2$ が成り立つことを証明せよ。
　　また，等号が成り立つときの x の値を求めよ。

（証明）

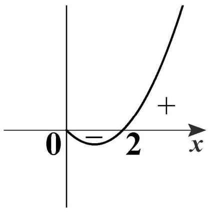
$f(x)=(x^3+4)-3x^2$ とすると

$f(x)=x^3-3x^2+4$

$f'(x)=3x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0$ とすると　$x=0，2$

$f(x)$の増減表は次のようになる。



x	0	……	2	……
$f'(x)$		－	0	＋
$f(x)$	4	↘	0	↗

よって，$x \geqq 0$ における$f(x)$の最小値は 0

ゆえに，$x \geqq 0$ のとき$f(x) \geqq 0$ であるから

$(x^3+4)-3x^2 \geqq 0$

すなわち　$(x^3+4) \geqq 3x^2$

等号が成り立つのは $f(x)=0$ のとき

つまり　$x=2$ のときである。

補充問題　3 次方程式 $x^3-3x-a=0$ の異なる実数解の個数は，定数aの値によってどのように
　　　　変わるか調べよ。

（解）

$x^3-3x-a=0$ ……①

変形すると　$x^3-3x=a$

$f(x)=x^3-3x$ とおくと

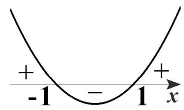
$y=f(x)$のグラフと直線 $x=a$ の共有点の

個数は，3 次方程式①の異なる実数解の個数

と一致する。

$f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$

$f'(x)=0$ とすると$x=-1，1$



よって，$f(x)$の増減表は右の表のようになり

$y=f(x)$のグラフは右の図のようになる。

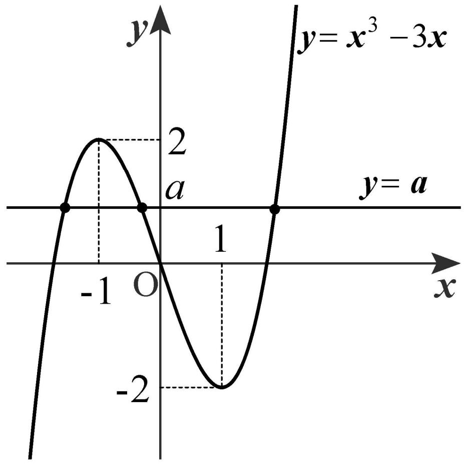
ゆえに　方程式①の実数解の個数は

　　$a<-2，2<a$　　のとき　1 個

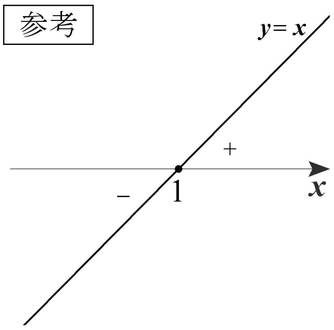
　　$a=-2，2$　　　のとき　2 個

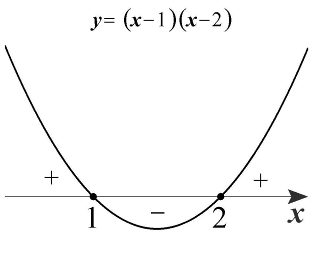
　　$-2<a<2$　　　のとき　3 個

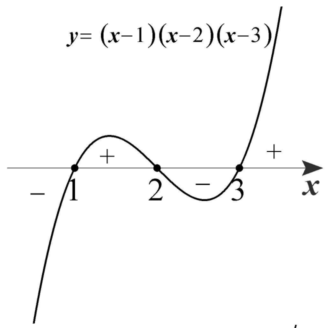
x	……	−1	……	1	……
$f'(x)$	＋	0	－	0	＋
$f(x)$	↗	2	↘	−2	↗

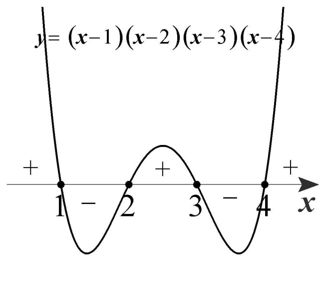


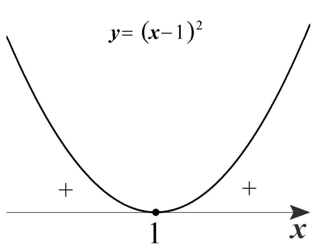
参考

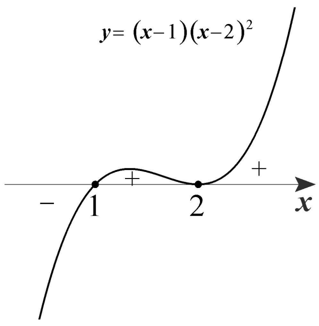


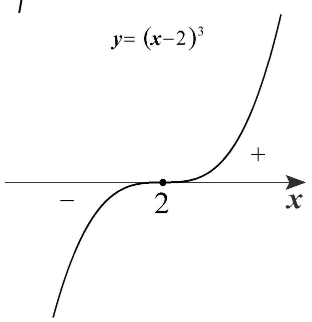












① $(x-1)(x-2)<0$
　の解は，図より
　　$1<x<2$

② $(x-1)(x-2)(x-3)>0$
　の解は，図より
　　$1<x<2，3<x$

③ $(x-1)(x-2)^2 \geqq 0$
　の解は，図より
　　$1 \leqq x$