1　直線上の点

1　2点A(a)、B(b) 間の距離ABは、AB $= |b-a|$　（注）絶対値 $|a| = \begin{cases} a & (a \geqq 0 \text{のとき}) \\ -a & (a < 0 \text{のとき}) \end{cases}$

2　2点A(a)、B(b) を結ぶ線分ABを、$m:n$ に内分する点をP、外分する点をQとすると
内分点Pの座標は $\dfrac{na+mb}{m+n}$、　外分点Qの座標は $\dfrac{(-n)a+mb}{m+(-n)}$ または $\dfrac{na+(-m)b}{(-m)+n}$

問１　次の２点間の距離を求めよ。

(1) A(2)、B(5)
（解）AB $= 5-2 = 3$

(2) A(-2)、B(3)
（解）AB $= 3-(-2) = 5$

(3) A(a)、B$(3a)$
（解）AB $= |3a-a| = 2|a|$
＊ a の符号が不明なので絶対値のまま

問２　2点A(3)、B(6)に対して、線分ABを $2:1$ に内分する点P、外分する点Qの座標を求めよ。
(解) 点Pの座標は $\dfrac{1\times3+2\times6}{2+1} = \dfrac{15}{3} = 5$　　点Qの座標は $\dfrac{(-1)\times3+2\times6}{2+(-1)} = 9$

2　平面上の点

1　2点A$(x_1,\ y_1)$、B$(x_2,\ y_2)$ 間の距離ABは、AB $= \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$
とくに、原点OとA$(x_1,\ y_1)$との距離OAは、OA $= \sqrt{x_1^2+y_1^2}$

2　2点A$(x_1,\ y_1)$、B$(x_2,\ y_2)$ を結ぶ線分ABを、$m:n$ に内分する点をP、外分する点をQとすると

P$\left(\dfrac{nx_1+mx_2}{m+n},\ \dfrac{ny_1+my_2}{m+n}\right)$

Q$\left(\dfrac{(-n)x_1+mx_2}{m+(-n)},\ \dfrac{(-n)y_1+my_2}{m+(-n)}\right)$　または　Q$\left(\dfrac{nx_1+(-m)x_2}{(-m)+n},\ \dfrac{ny_1+(-m)y_2}{(-m)+n}\right)$

とくに、線分ABの中点の座標は $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2},\ \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)$

3　3点A$(x_1,\ y_1)$、B$(x_2,\ y_2)$、C$(x_3,\ y_3)$ を頂点とする△ABCの重心の座標は
$\left(\dfrac{x_1+x_2+x_3}{3},\ \dfrac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$

問１　2点A$(2,\ -1)$、B$(4,\ 3)$ 間の距離を求めよ。
（解）
AB $= \sqrt{(4-2)^2+\{3-(-1)\}^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

問２　2点A$(-1,\ 6)$、B$(4,\ 1)$ を結ぶ線分ABについて、次の点の座標を求めよ。

(1)　$3:2$ に内分する点P
（解）
$$\left(\frac{2\times(-1)+3\times4}{3+2},\ \frac{2\times6+3\times1}{3+2}\right) = (2,\ 3)$$

(1)　$5:2$ に外分する点Q
（解）
$$\left(\frac{(-2)\times(-1)+5\times4}{5+(-2)},\ \frac{(-2)\times6+5\times1}{5+(-2)}\right) = \left(\frac{22}{3},\ -\frac{7}{3}\right)$$

問３　3点A$(1,\ 1)$、B$(5,\ 2)$、C$(3,\ 4)$ を頂点とする△ABCの重心の座標を求めよ。
（解）
重心の座標は $\left(\dfrac{1+5+3}{3},\ \dfrac{1+2+4}{3}\right) = \left(3,\ \dfrac{7}{3}\right)$

3　直線の方程式

【直線の方程式の形】

1　標準的な形（傾きが見える）

$y = mx + n$　(傾きが m、y切片が n)　または　$x = x_1$　(傾きなし、x軸に垂直、x切片がx_1)

2　一般的な形（傾きがあってもなくても表現できる）

$ax + by + c = 0$

【直線の方程式を求める公式】

1　点$(x_1,\ y_1)$を通り、傾きが m の直線の方程式は　$y - y_1 = m(x - x_1)$

2　点$(x_1,\ y_1)$を通り、x軸に垂直な直線の方程式は　$x = x_1$

3　異なる２点 $(x_1,\ y_1)$、$(x_2,\ y_2)$ を通る直線の方程式は

$x_1 \neq x_2$とき　$y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$　　（注）$\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ は直線の傾き

$x_1 = x_2$とき　$x = x_1$　（x軸に垂直な直線）

4　x切片が a、y切片が b である直線の方程式は　$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$

問　次のような直線の方程式を求めよ。

(1)　点$(1,\ 3)$を通り、傾きが２

(解)　$y - 3 = 2(x - 1)$　すなわち　$y = 2x + 1$

(2)　２点$(1,\ 2)$、$(3,\ -4)$を通る

(解)　$y - 2 = \dfrac{-4 - 2}{3 - 1}(x - 1)$

すなわち　$y = -3x + 5$

(3)　２点$(3,\ -1)$、$(3,\ 4)$を通る

(解)　x座標が同じなので　$x = 3$

(4)　x切片が３、y切片が２

(解)　$\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} = 1$

4　２直線の平行・垂直

【平行・垂直条件】

1〈標準的な形〉　異なる２直線 $y = m_1x + k_1$、$y = m_2x + k_2$ について

２直線が平行 $\Leftrightarrow$ $m_1 = m_2$

２直線が垂直 $\Leftrightarrow$ $m_1m_2 = -1$

2〈一般的な形〉　異なる２直線 $a_1x + b_1y + c_1 = 0$、$a_2x + b_2y + c_2 = 0$ について

２直線が平行 $\Leftrightarrow a_1b_2 = a_2b_1$　……傾きが等しい　$-\dfrac{a_1}{b_1} = -\dfrac{a_2}{b_2}$

２直線が垂直 $\Leftrightarrow a_1a_2 + b_1b_2 = 0$　……傾きの積が－１　$\left(-\dfrac{a_1}{b_1}\right)\left(-\dfrac{a_2}{b_2}\right) = -1$

【平行・垂直な直線】

1〈標準的な形〉　点$(x_1,\ y_1)$を通り、直線 $y = mx + k$ に対して

平行な直線は　$y - y_1 = m(x - x_1)$　　垂直な直線は　$y - y_1 = -\dfrac{1}{m}(x - x_1)$

2〈一般的な形〉　点$(x_1,\ y_1)$を通り、直線 $ax + by + c = 0$ に対して

平行な直線は　$a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0$

垂直な直線は　$b(x - x_1) - a(y - y_1) = 0$　または　$-b(x - x_1) + a(y - y_1) = 0$

【直線に関して対称な点】

２点Ａ，Ｂが直線 ℓ に関して対称であるのは、次の[1]、[2]が成り立つときである。

[1]　直線ＡＢは ℓ に垂直である　　[2]線分ＡＢの中点は ℓ 上にある

（注）直線 ℓ は、線分ＡＢの垂直二等分線である。

問１　点$(2, 1)$を通り、直線ℓ：$2x+3y+4=0$に平行な直線、垂直な直線の方程式をそれぞれ求めよ。

（解１）

直線ℓは　$y=-\frac{2}{3}x-\frac{4}{3}$と変形できるので、傾きは$-\frac{2}{3}$

直線ℓに平行な直線の方程式は　$y-1=-\frac{2}{3}(x-2)$　つまり　$3y-3=-2x+4$

よって　$2x+3y-7=0$

直線ℓに垂直な直線の傾きをmとすると　$-\frac{2}{3}m=-1$　つまり　$m=\frac{3}{2}$　となるので

垂直な直線の方程式は　$y-1=\frac{3}{2}(x-2)$　つまり　$2y-2=3x-6$

よって　$3x-2y-4=0$

平行な直線は　$2x+3y-7=0$、垂直な直線は　$3x-2y-4=0$

（解２）

直線ℓに平行な直線は　$2(x-2)+3(y-1)=0$　となるので整理して　$2x+3y-7=0$

直線ℓに垂直な直線は　$3(x-2)-2(y-1)=0$　となるので整理して　$3x-2y-4=0$

問２　直線$2x-y-1=0$をℓとする。直線ℓに関して点Ａ$(0, 4)$と対称な点Ｂの座標を求めよ。

（解）

点Ｂの座標を(p, q)とする。

直線ℓの傾きは2、直線ＡＢの傾きは$\frac{q-4}{p-0}=\frac{q-4}{p}$となる

ＡＢ$\perp\ell$であるから　$2\cdot\frac{q-4}{p}=-1$　すなわち　$p+2q-8=0\cdots\cdots$①

線分ＡＢの中点$\left(\frac{p}{2}, \frac{q+4}{2}\right)$が直線$\ell$上にあるので

$2\cdot\frac{p}{2}-\frac{q+4}{2}-1=0$　すなわち　$2p-q-6=0\cdots\cdots$②

①、②の連立方程式を解いて　$p=4, q=2$

したがって、点Ｂの座標は　$(4, 2)$

5　点と直線との距離

点(x_1, y_1)と直線$ax+by+c=0$との距離dは　$d=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

問　点$(1, -2)$と直線　$3x+4y+4=0$の距離dを求めよ。

（解）

$$d=\frac{|3\cdot1+4\cdot(-2)+4|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{|-1|}{\sqrt{25}}=\frac{1}{5}$$

6　２直線の交点を通る直線の方程式

2直線$a_1x+b_1y+c_1=0$、$a_2x+b_2y+c_2=0$の交点を通る直線の方程式は
kを定数として　$(a_1x+b_1y+c_1)+k(a_2x+b_2y+c_2)=0$　で表される

問　2直線$x-y-1=0$, $x+2y-4=0$の交点と、点$(0, 3)$を通る直線の方程式を求めよ。

（解）

求める直線の方程式は　$(x-y-1)+k(x+2y-4)=0\cdots\cdots$①　と表せる

点$(0, 3)$を通ので、①に代入して　$(0-3-1)+k(0+2\cdot3-4)=0$

整理すると$-4+2k=0$　よって　$k=2$

①に代入して整理すると　$x+y-3=0$

7　円の方程式

１〈標準的な形〉	$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$	中心の座標 $(a,\ b)$，半径 r
	$x^2+y^2=r^2$	中心が原点，半径 r
２〈一般的な形〉	$x^2+y^2+lx+my+n=0$	

問１　次のような円の方程式を求めよ。

(1)　中心が点$(4,\ -3)$，半径が 5

(解)　$(x-4)^2+\{y-(-3)\}^2=5^2$　すなわち　$(x-4)^2+(y+3)^2=25$

(2)　２点 A$(3,\ 4)$，B$(-1,\ 2)$ を直径の両端とする

(解)　求める円の中心をＣ，半径を r とする。

Ｃは線分ＡＢの中点なので、その座標は　$\left(\dfrac{3+(-1)}{2},\ \dfrac{4+2}{2}\right)=(1,\ 3)$

$r=\mathrm{CA}=\sqrt{(3-1)^2+(4-3)^2}=\sqrt{5}$

求める円の方程式は　$(x-1)^2+(y-3)^2=\left(\sqrt{5}\right)^2$　すなわち　$(x-1)^2+(y-3)^2=5$

問２　方程式　$x^2+y^2-6x+2y-6=0$　はどのような図形を表すか。

(解)　変形すると　$(x^2-6x)+(y^2+2y)-6=0$

$\{(x-3)^2-3^2\}+\{(y+1)^2-1^2\}-6=0$　整理すると　$(x-3)^2+(y+1)^2=4^2$

これは、中心が点$(3,\ -1)$，半径が 4 の円である

問３　３点 A$(2,\ 4)$，B$(2,\ 0)$，C$(-1,\ 3)$ を通る円の方程式を求めよ。

（解）

求める円の方程式を $x^2+y^2+lx+my+n=0$ とする。

点Ａを通るので　$2^2+4^2+2l+4m+n=0$

点Ｂを通るので　$2^2+2l+n=0$

点Ｃを通るので　$(-1)^2+3^2+(-1)l+3m+n=0$

整理して　$2l+4m+n=-20\cdots\cdots$①　$2l+n=-4\cdots\cdots$②　$-l+3m+n=-10\cdots\cdots$③

①－②　$4m=-16$　ゆえに　$m=-4$

②－③　$3l-3m=6$　整理して　$l-m=2$

$m=-4$ より　$l+4=2$　ゆえに　$l=-2$

②より　$2\cdot(-2)+n=-4$　ゆえに　$n=0$

よって，求める円の方程式は　$x^2+y^2-2x-4y=0$

8　円と直線の共有点

問　次の円と直線の共有点の座標を求めよ。

(1)　$x^2+y^2=5$，$y=x-1$

（解）

$\begin{cases} x^2+y^2=5\cdots\cdots① \\ y=x-1\quad\cdots\cdots② \end{cases}$

②を①を代入して　$x^2+(x-1)^2=5$

整理すると　$x^2-x-2=0$

$(x+1)(x-2)=0$　解いて　$x=-1,\ 2$

これを②に代入して

$x=-1$ のとき $y=-2$

$x=2$ のとき $y=1$

よって　求める座標は$(-1,\ -2)$，$(2,\ 1)$

(2)　$x^2+y^2=5$，$2x-y+5=0$

（解）

$\begin{cases} x^2+y^2=5\quad\cdots\cdots① \\ 2x-y+5=0\cdots\cdots② \end{cases}$

②より $y=2x+5$ を①に代入して

$x^2+(2x+5)^2=5$

整理すると　$x^2+4x+4=0$

$(x+2)^2=0$　解いて　$x=-2$

これを②に代入して、　$y=1$

求める座標は$(-2,\ 1)$

9　円と直線の位置関係

【2 次方程式の判別式を利用】
共有点の座標を求めるとき、円の方程式と直線の方程式から y を消去して得られる x の 2 次方程式を
　$ax^2+bx+c=0$……① とする。判別式をDとすると、$D=b^2-4ac$
方程式①が実数解をもつとき、円と直線は共有点をもつ。実数解をもたないときは、共有点をもたない。
したがって、判別式Dを用いると、円と直線の位置関係は次のようになる。
　$D>0$　⇔　異なる 2 点で交わる（方程式①は異なる 2 つの実数解をもつ）
　$D=0$　⇔　接する　　　　　　（方程式①は重解をもつ、1 つの実数解）
　$D<0$　⇔　共有点をもたない　（方程式①は異なる 2 つの虚数解をもつ、実数解はもたない）

【円の中心と直線の距離を利用】
半径が r の円の中心と、直線 ℓ との距離を d とする。
d と r の大小関係を用いると、円と直線の位置関係は次のようになる。
　$d<r$　⇔　異なる 2 点で交わる
　$d=r$　⇔　接する
　$d>r$　⇔　共有点をもたない

問１　円 $x^2+y^2=8$ と直線 $y=x+m$ が共有点をもつとき、定数 m の値の範囲を求めよ。
（解）
$$\begin{cases} x^2+y^2=8 \cdots\cdots ① \\ y=x+m \ \cdots\cdots ② \end{cases}$$
②を①に代入すると　$x^2+(x+m)^2=8$
整理して　$2x^2+2mx+m^2-8=0$
判別式をDとすると　$\dfrac{D}{4}=m^2-2(m^2-8)=-(m^2-16)=-(m+4)(m-4)$
円と直線が共有点をもつのは、D $\geqq 0$ のときである。
よって　$-(m+4)(m-4)\geqq 0$　つまり　$(m+4)(m-4)\leqq 0$
ゆえに $-4\leqq m\leqq 4$

問２　半径 r の円 $x^2+y^2=r^2$ と直線 $3x+4y-10=0$ が接するとき、r の値を求めよ。
（解）
この円の中心は原点であり、原点と直線 $3x+4y-10=0$ との距離 d は
$$d=\frac{|3\cdot 0+4\cdot 0-10|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{10}{5}=2$$
円と直線が接するのは　$d=r$　のときであるので、$r=2$

10　円の接線の方程式

円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 P$(p,\ q)$ における接線の方程式は　$px+qy=r^2$

問　点 A$(1,\ 3)$ から円 $x^2+y^2=5$ に引いた接線の方程式と接点の座標を求めよ。
（解）
接点を P$(p,\ q)$ とすると、P は円上にあるから $p^2+q^2=5$……①
また、P における円の接線の方程式は　$px+qy=5$……②　で
この直線が点 A$(1,\ 3)$ を通るので　$p+3q=5$……③
③から $p=-3q+5$ を①に代入して整理すると　$q^2-3q+2=0$
ゆえに　$(q-1)(q-2)=0$　これを解いて　$q=1,\ 2$
$q=1$ のとき $p=2$，$q=2$ のとき $p=-1$
よって　接線 $2x+y=5$，接点 $(2,\ 1)$　　接線 $-x+2y=5$，接点 $(-1,\ 2)$

11　２つの円の位置関係

２つの円の中心をＣ，Ｃ′、半径をr，r'とし、中心間の距離ＣＣ′をdとする。ただし、$r>r'$とする。
このとき２つの円の位置関係は次のようになる。

1	$d>r+r'$	$\Leftrightarrow$	一方が他方の外部にある
2	$d=r+r'$	$\Leftrightarrow$	外接する（1点を共有する）
3	$r-r'<d<r+r'$	$\Leftrightarrow$	2点で交わる
4	$d=r-r'$	$\Leftrightarrow$	内接する（1点を共有する）
5	$d<r-r'$	$\Leftrightarrow$	一方が他方の内部にある

問　中心が点$(4,\ 3)$で、円$x^2+y^2=1$に外接する円の方程式を求めよ。
（解）
円$x^2+y^2=1$は中心が原点，半径が1である。
2つの円の中心間の距離dは　$d=\sqrt{(4-0)^2+(3-0)^2}=5$
2つの円が外接するとき、求める円の半径をrとすると　$5=r+1$
これを解くと　$r=4$
よって求める円の方程式は　$(x-4)^2+(y-3)^2=4^2$　すなわち　$(x-4)^2+(y-3)^2=16$

12　軌跡と方程式

【軌跡の求め方】
手順１　条件を満たす点Ｐの座標を$(x,\ y)$とする。
手順２　問題で与えられた点Ｐに関する条件をx，yの式で表す。
手順３　手順２で求めた式を整理し、この方程式が表す図形が何かを調べる。
手順４　逆に、手順３で求めた図形上のすべての点Ｐが、与えられた条件を満たすかどうかを調べる。

問１　2点Ａ$(0,\ 2)$、Ｂ$(4,\ 0)$に対して、ＡＰ＝ＢＰを満たす点Ｐの軌跡を求めよ。
（解）
点Ｐの座標を$(x,\ y)$とする。
Ｐに関する条件は　ＡＰ＝ＢＰ　より　$\mathrm{AP}^2=\mathrm{BP}^2$
よって　$(x-0)^2+(y-2)^2=(x-4)^2+(y-0)^2$
整理すると　$2x-y-3=0$
よって　点Ｐは直線$2x-y-3=0$上にある。
逆に、この直線上のすべての点Ｐ$(x,\ y)$は条件を満たす。
したがって、求める軌跡は、直線$2x-y-3=0$である。

問２　原点Ｏからの距離と点Ａ$(3,\ 0)$からの距離の比が$2:1$である点Ｐの軌跡を求めよ。
（解）
点Ｐの座標を$(x,\ y)$とする。
Ｐに関する条件は　$\mathrm{OP}:\mathrm{AP}=2:1$　であるので
$2\mathrm{AP}=\mathrm{OP}$　より　$4\mathrm{AP}^2=\mathrm{OP}^2$
座標を代入して　$4\{(x-3)^2+(y-0)^2\}=(x-0)^2+(y-0)^2$
整理すると　$x^2-8x+y^2+12=0$
変形して　$(x-4)^2-4^2+y^2+12=0$　すなわち　$(x-4)^2+y^2=2^2$
よって　点Ｐは　円$(x-4)^2+y^2=2^2$上にある。
逆に、この円上のすべての点Ｐ$(x,\ y)$は条件を満たす。
したがって、求める軌跡は、点$(4,\ 0)$を中心とする半径2の円である。

問３　点Ｑが円 $x^2+y^2=2^2$ 上を動くとき、点Ａ $(4,\ 0)$ と点Ｑを結ぶ線分ＡＱの中点Ｐの軌跡を求めよ。

（解）

点Ｐの座標を $(x,\ y)$、点Ｑの座標を $(s,\ t)$ とする。

点Ｑは円 $x^2+y^2=2^2$ 上にあるから　$s^2+t^2=2^2\cdots\cdots$①

また、点Ｐは線分ＡＱの中点であるから　$x=\dfrac{s+4}{2}$、$y=\dfrac{t}{2}$

すなわち　$s=2x-4$、$t=2y$　となる

これらを①に代入して　$(2x-4)^2+(2y)^2=2^2$　整理すると　$(x-2)^2+y^2=1^2$

よって　点Ｐは　円 $(x-2)^2+y^2=1^2$ 上にある。

逆に、この円上のすべての点Ｐ $(x,\ y)$ は条件を満たす。

したがって、求める軌跡は、点 $(2,\ 0)$ を中心とする半径１の円である。

13　不等式の表す領域

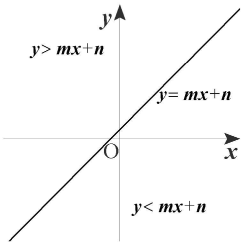
【直線と領域】

１　境界線が傾きのある直線のとき

直線 $y=mx+n$ を ℓ とする。

① 不等式 $y>mx+n$ の表す領域　⇒　直線 ℓ の上側の部分

② 不等式 $y<mx+n$ の表す領域　⇒　直線 ℓ の下側の部分

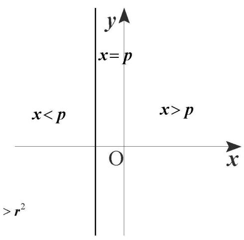


２　境界線が傾きのない直線のとき（x軸に垂直）

直線 $x=p$ を ℓ とする。

① 不等式 $x>p$ の表す領域　⇒　直線 ℓ の右側の部分

② 不等式 $x<p$ の表す領域　⇒　直線 ℓ の左側の部分

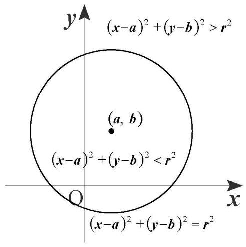


３　境界線が円のとき

円 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ をＣとする。

① 不等式 $(x-a)^2+(y-b)^2>r^2$ の表す領域　⇒円Ｃの外部

② 不等式 $(x-a)^2+(y-b)^2<r^2$ の表す領域　⇒円Ｃの内部



問１　次の不等式の表す領域を図示せよ。

(1)　$y>-x+2$

（解）

この領域は、

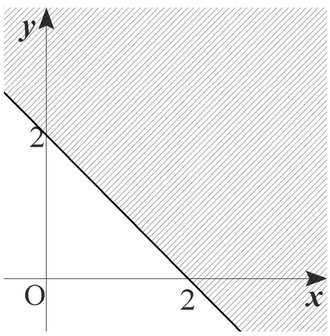
直線 $y=-x+2$ の

上側の部分で、

右の図の斜線部分。

ただし、

境界線は含まない。



(2)　$2x-y+3\geqq 0$

（解）

不等式を変形すると

$y\leqq 2x+3$

この領域は、

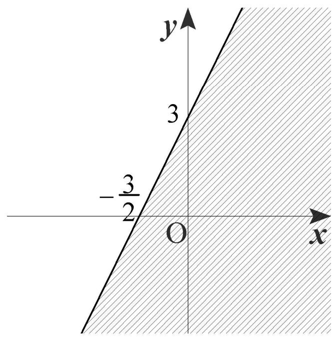
直線 $y=2x+3$ および

その下側の部分で、

右の図の斜線部分。

ただし、

境界線も含む。



(3)　$x<2$

（解）

この領域は、

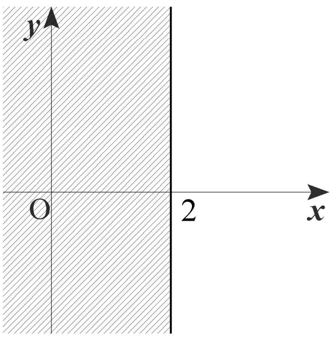
直線 $x=2$ の

左側の部分で

右の図の斜線部分。

ただし、

境界線は含まない。



(4)　$x+2\geqq 0$

（解）

不等式を変形すると

$x\geqq -2$

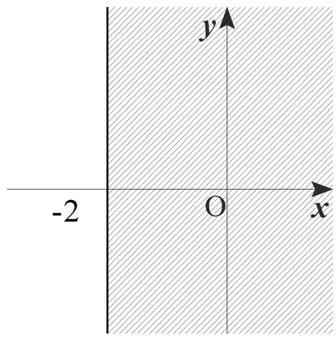
この領域は、

直線 $x=-2$ および

その右側の部分で、

右の図の斜線部分。

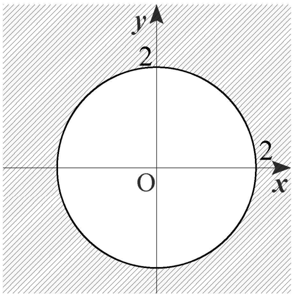
ただし、境界線も含む。



(5)　$x^2+y^2>4$

（解）

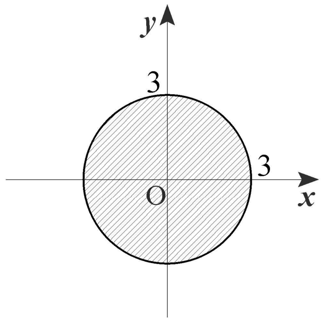
この領域は、
円$x^2+y^2=4$の外部
で右の図の斜線部分。
ただし、
境界線は含まない。



(6)　$x^2+y^2\leqq 9$

（解）

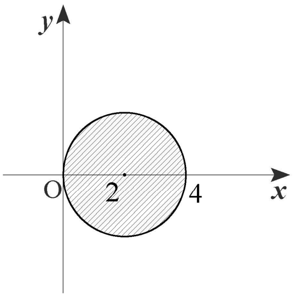
この領域は、
円$x^2+y^2=9$および
その内部で、
右の図の斜線部分。
ただし、境界線も含む



(7)　$(x-2)^2+y^2\leqq 4$

（解）

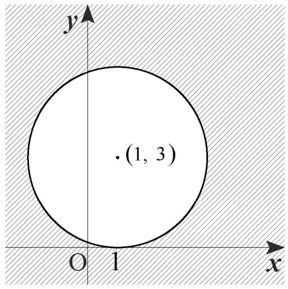
この領域は、
円 $(x-2)^2+y^2=4$
およびその内部で、
右の図の斜線部分。
ただし、
境界線も含む。



(8)　$(x-1)^2+(y-3)^2>9$

（解）

この領域は、
円 $(x-1)^2+(y-3)^2=9$
の外部で 右の図の斜線部分。
ただし、境界線は含まない。



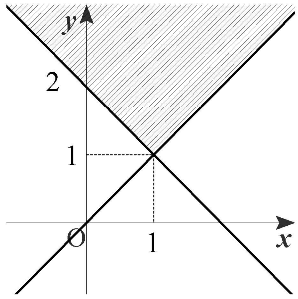
問２　次の連立不等式の表す領域を図示せよ。

(1)　$\begin{cases} x+y-2>0 \\ x-y<0 \end{cases}$

（解）

変形すると　$\begin{cases} y>-x+2 \\ y>x \end{cases}$

この領域は、直線 $y-x+2$ の上側の部分と
直線 $y=x$ の上側の部分に共通する部分で、
右の図の斜線部分。
ただし、境界線は含まない。

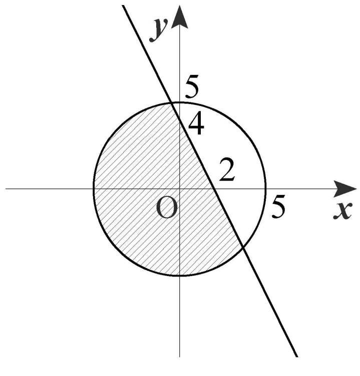


(2)　$\begin{cases} x^2+y^2<25 \\ 2x+y<4 \end{cases}$

（解）

変形すると　$\begin{cases} x^2+y^2<25 \\ y<-2x+4 \end{cases}$

この領域は、円 $x^2+y^2=25$ の内部と
直線 $y=-2x+4$ の下側の部分に共通
する部分で、右の図の斜線部分。
ただし、境界線は含まない。



問３　次の不等式の表す領域を図示せよ。

$$(x-y)(x+y-1)<0$$

（解）

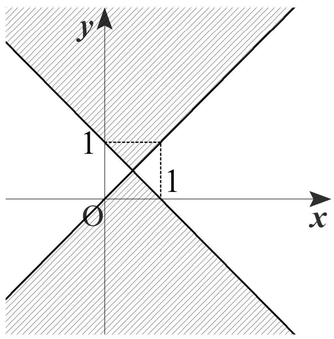
予式が成り立つことは

$\begin{cases} x-y>0 \\ x+y-1<0 \end{cases}$　または　$\begin{cases} x-y<0 \\ x+y-1>0 \end{cases}$

が成り立つことと同じである。変形して

$\begin{cases} y<x \\ y<-x+1 \end{cases}$　または　$\begin{cases} y>x \\ y>-x+1 \end{cases}$

よって、求める領域は右の図の斜線部分。
ただし、境界線は含まない。



問４　x、yが４つの不等式

$$x \geqq 0、y \geqq 0、2x+y \leqq 8、2x+3y \leqq 12$$

を同時に満たすとき、$x+y$の最大値、最小値を求めよ。

（解）

４つの不等式を変形すると

$$x \geqq 0、y \geqq 0、y \leqq -2x+8、y \leqq -\frac{2}{3}x+4$$

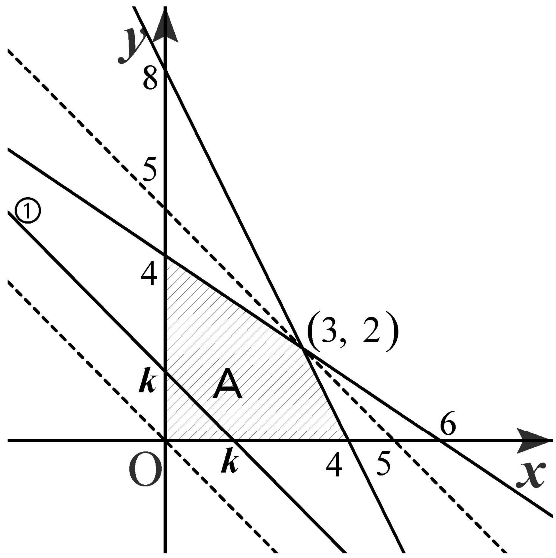
となる。

この連立不等式の表す領域をAとする。

領域Aは４点$(0,\ 0)$，$(4,\ 0)$，$(3,\ 2)$，$(0,\ 4)$，

を頂点とする四角形の周及び内部であり、

右の図の斜線部分である。ただし、境界線も含む。



$x+y=k$　とおくと　$y=-x+k$ ……①

これは、傾きが-1，y切片がkである直線を表す。

この直線①が領域Aと共有点をもつときのkの値の

最大値，最小値を求めればよい。

領域Aにおいて、直線①が

　点$(3,\ 2)$を通るときkは最大で、そのとき$k=3+2=5$

　点$(0,\ 0)$を通るときkは最小で、そのとき$k=0+0=0$

である。

したがって、$x+y$は

　$x=3$，$y=2$のとき最大値５をとり，

　$x=0$，$y=0$のとき最小値０をとる。

問５　次の不等式を表す領域を求めよ。

(1)　$1 \leqq x+y \leqq 3$

（解）

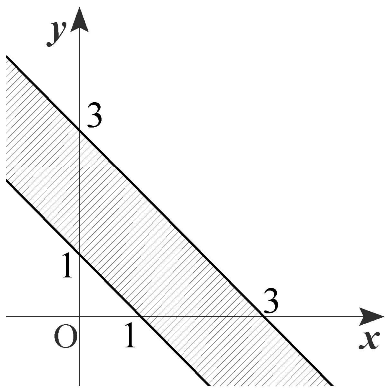
予式は、連立不等式 $\begin{cases} 1 \leqq x+y \\ x+y \leqq 3 \end{cases}$ と表せる

整理して $\begin{cases} y \geqq -x+1 \\ y \leqq -x+3 \end{cases}$

この領域は、直線$y=-x+1$およびその上側の部分と、

直線$y=-x+3$およびその下側の部分と共通する部分で

右の図の斜線部分。ただし、境界線も含む。



(2)　$4 \leqq x^2+y^2 \leqq 9$

（解）

予式は、連立不等式 $\begin{cases} 4 \leqq x^2+y^2 \\ x^2+y^2 \leqq 9 \end{cases}$ と表せる

整理して $\begin{cases} x^2+y^2 \geqq 4 \\ x^2+y^2 \leqq 9 \end{cases}$

この領域は、円$x^2+y^2=4$およびその外部と、

円$x^2+y^2=9$ およびその内部の部分と共通する部分で

右の図の斜線部分。ただし、境界線も含む。