数学Ⅱ　第４章　三角関数（１）　　　　　　　　　　　年　　組　　番・氏名

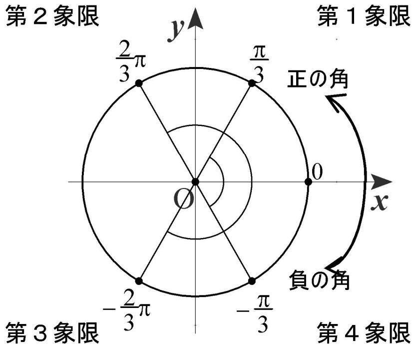
1　弧度法

【角の考え方】

三角関数では、x軸の正の部分からの回転の角を考える。

時計の針の回転と逆向きを、　正の角　という。

時計の針の回転と同じ向きを、負の角　という。



【扇形の弧の長さと面積】

半径 r，中心角 θ(ﾗｼﾞｱﾝ) の扇形の弧の長さ l，面積 Sは

$l = r\theta$，　$S = \frac{1}{2}r^2\theta$　または　$S = \frac{1}{2}lr$

問１　度数法と弧度法の対応表を完成させよ。

度数法	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
弧度法													

度数法	45°	135°	225°	315°
弧度法				

（参考）$l =$ 円周の長さ $\times \frac{中心角}{2\pi} = 2\pi r \times \frac{\theta}{2\pi} = r\theta$

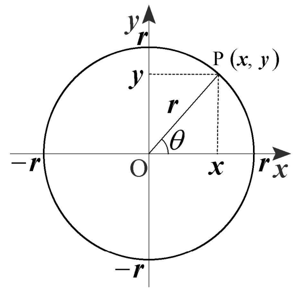
$S =$ 円の面積 $\times \frac{中心角}{2\pi} = \pi r^2 \times \frac{\theta}{2\pi} = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}r\theta \cdot r = \frac{1}{2}lr$

問２　半径 10，中心角 $\frac{\pi}{6}$ の扇形の弧の長さ l と面積 Sを求めよ。

2　三角関数

【三角関数の定義】

正弦： $\sin\theta = \frac{y}{r}$　　余弦： $\cos\theta = \frac{x}{r}$　　正接： $\tan\theta = \frac{y}{x}$



【三角関数の相互関係】

1　$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

2　$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

3　$1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$

問１　次の三角関数の値の表を完成させよ。

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin\theta$																	
$\cos\theta$																	
$\tan\theta$																	

問２　次の値を求めよ。

$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$　　　$\cos\frac{23}{6}\pi$　　　$\tan\left(-\frac{9}{4}\pi\right)$

問３　次の問いに答えよ。

(1) θが第3象限の角で，$\cos\theta=-\dfrac{3}{5}$のとき，$\sin\theta$，$\tan\theta$の値を求めよ。

(2) θが第4象限の角で，$\tan\theta=-2$のとき，$\sin\theta$，$\cos\theta$の値を求めよ。

問４　$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{2}$のとき，$\sin\theta\cos\theta$の値を求めよ。

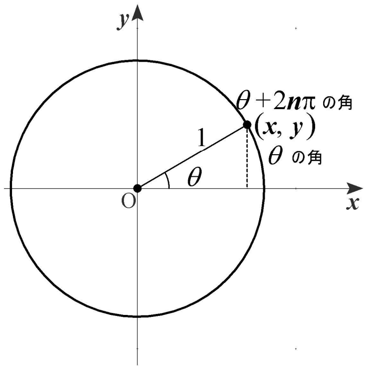
問５　等式　$\tan\theta+\dfrac{1}{\tan\theta}=\dfrac{1}{\sin\theta\cos\theta}$ を証明せよ。

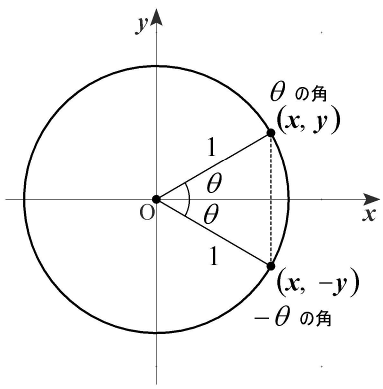
$\boxed{3}$　三角関数の性質

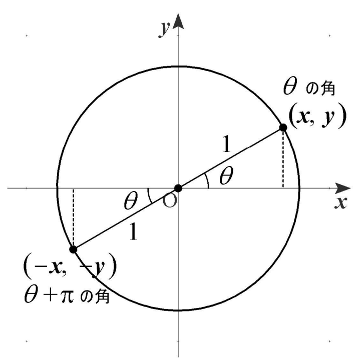
1　$\sin(\theta+2n\pi)=\sin\theta$
$\cos(\theta+2n\pi)=\cos\theta$
$\tan(\theta+2n\pi)=\tan\theta$
nは整数

2　$\sin(-\theta)=-\sin\theta$
$\cos(-\theta)=\cos\theta$
$\tan(-\theta)=-\tan\theta$

3　$\sin(\theta+\pi)=-\sin\theta$
$\cos(\theta+\pi)=-\cos\theta$
$\tan(\theta+\pi)=\tan\theta$







4 $\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos\theta$

$\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin\theta$

$\tan\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{1}{\tan\theta}$

5 $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$

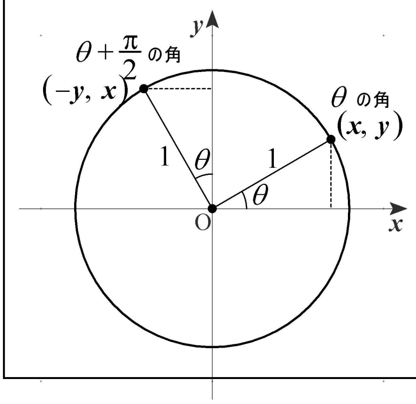
$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$

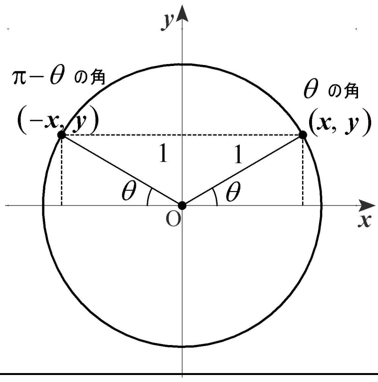
$\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$

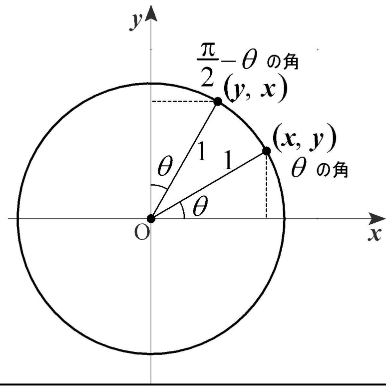
6 $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$

$\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\dfrac{1}{\tan\theta}$



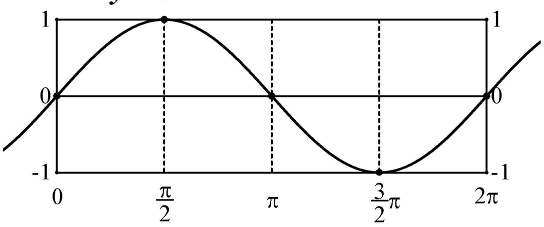




$\boxed{4}$　三角関数のグラフ

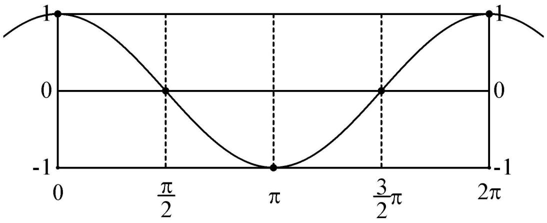
【三角関数のグラフの基本形】

$y=\sin\theta$ のグラフの基本形



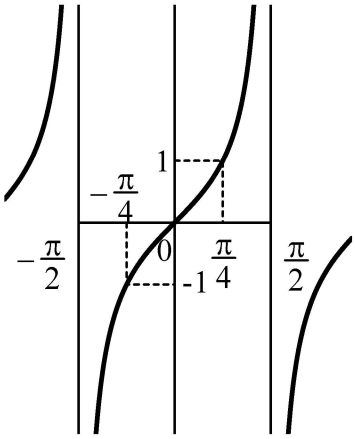
周期は 2π

$y=\cos\theta$ のグラフの基本形



周期は 2π

$y=\tan\theta$ のグラフの基本形



周期はπ

問　次の三角関数のグラフをかけ。

(1)　$y=\sin\theta$

(3)　$y=\tan\theta$

(2)　$y=\cos\theta$

5　いろいろな三角関数のグラフ

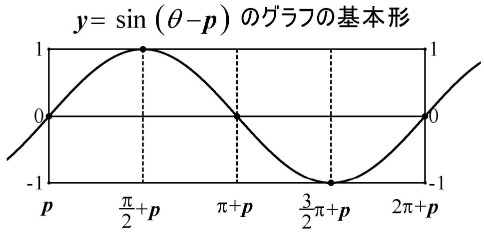
【 $y = \sin(\theta - p)$ 】

$\theta - p = 0$ とすると、$\theta = p$

ゆえに、このグラフは $y = \sin\theta$ のグラフを

θ軸方向に p だけ平行移動したもの。

周期は 2πである。



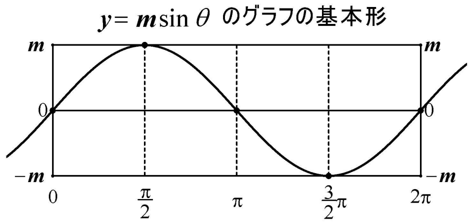
【 $y = m\sin\theta$ 】

このグラフは $y = \sin\theta$ のグラフを

y軸方向へ m 倍に

拡大または縮小したもの。

周期は 2πである。



【 $y = \sin k\theta$ 】

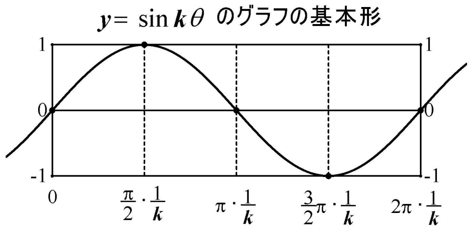
$k\theta = 2\pi$ とすると、$\theta = 2\pi \cdot \dfrac{1}{k}$

ゆえに、このグラフは $y = \sin\theta$ のグラフを

θ軸方向へ $\dfrac{1}{k}$ 倍に

拡大または縮小したもの。

周期は $\dfrac{2\pi}{k}$ である。



問　次の関数のグラフをかけ。

(1)　$y = \sin\left(\theta - \dfrac{\pi}{3}\right)$

(2)　$y = 2\cos\theta$

(3)　$y = \sin 2\theta$

$\boxed{6}$　三角関数を含む方程式・不等式

問１　$0 \leqq \theta < 2\pi$のとき，次の方程式を解け。

(1)　$\sin\theta = -\dfrac{1}{2}$　　(2)　$\cos\theta = \dfrac{1}{2}$　　(3)　$\tan\theta = \sqrt{3}$

問２　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，方程式 $5\sin\theta - 2\cos^2\theta + 4 = 0$ を解け。

問　$0 \leqq \theta < 2\pi$のとき，次の不等式を解け。

(1)　$\cos\theta \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(2)　$\sin\theta < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(3)　$\tan\theta \geqq 1$

7　加法定理

1　$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

　$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

2　$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

　$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

3　$\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

　$\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

問　加法定理を使って，次の値を求めよ。

(1)　$\sin 75°$　　(2)　$\cos 15°$　　(3)　$\tan 75°$

問　2直線 $y = -2x$，$y = 3x$ のなす角 θ を求めよ。

ただし，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ とする。

数学Ⅱ　第４章　三角関数（７）　　　　　　　　　　年　　組　　番・氏名

$\boxed{8}$　２倍角の公式、半角の公式、三角関数の合成

【２倍角の公式】

１　$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

２　$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

３　$\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

【半角の公式】

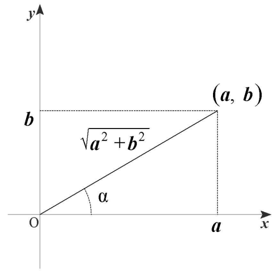
１　$\sin^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{2}$

２　$\cos^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1+\cos\alpha}{2}$

３　$\tan^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$

【三角関数の合成】

$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(\theta+\alpha)$



$\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

問１　$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$で，$\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$のとき，次の値を求めよ。

(1)　$\cos\alpha$　　　(2)　$\sin 2\alpha$　　　(3)　$\cos 2\alpha$

問２　等式 $\dfrac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = \tan\alpha$ を証明せよ。

問３　半角の公式を使って $\sin\dfrac{\pi}{8}$ の値を求めよ。

問４　$0 \leqq \theta < 2\pi$のとき，方程式 $\cos 2\theta + \cos\theta + 1 = 0$ を解け。

問５　$\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta$ を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に表せ。ただし，$r>0$，$-\pi<\alpha<\pi$ とする。

問６　関数 $y=\sin x+\cos x$ の最大値，最小値を求めよ。

問７　$0\leqq x<2\pi$ のとき，方程式 $\sqrt{3}\sin x-\cos x=1$ を解け。

発展　和と積の公式

【積から和に変形】

1　$\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$

2　$\cos\alpha\sin\beta=\dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$

3　$\cos\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$

4　$\sin\alpha\sin\beta=-\dfrac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$

【和から積に変形】

5　$\sin A+\sin B=2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

6　$\sin A-\sin B=2\cos\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

7　$\cos A+\cos B=2\cos\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$

8　$\cos A-\cos B=-2\sin\dfrac{A+B}{2}\sin\dfrac{A-B}{2}$

（１と５の証明）

加法定理より

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$ ……①

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$ ……②

①＋②を計算して　$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$ ……③

両辺を２で割って　$\sin\alpha\cos\beta=\dfrac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$　⇒ 公式１

ここで　$\alpha+\beta=A$ ……④，$\alpha-\beta=B$ ……⑤　とすると

④＋⑤を計算して　$2\alpha=A+B$ から　$\alpha=\dfrac{A+B}{2}$，同様に④－⑤から　$\beta=\dfrac{A-B}{2}$

これらを③に代入すると　$\sin A+\sin B=2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}$　⇒ 公式５