1　展開・因数分解の公式

① $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$
　$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

② $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

③ $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

④ $(ax+b)(cx+d)=acx^2+(ad+bc)x+bd$

⑤ $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca$

⑥ $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
　$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

⑦ $(a+b)(a^2-ab+b^2)=a^3+b^3$
　$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$

2　二項定理

〈数学Ａの復習〉

１ 順列　${}_5\mathrm{P}_3=5\cdot4\cdot3=60$　　２ 組合せ　${}_5\mathrm{C}_3=\dfrac{5\cdot4\cdot3}{3\cdot2\cdot1}=10$　${}_5\mathrm{C}_2=\dfrac{5\cdot4}{2\cdot1}=10$　$\therefore\ {}_5\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_2$

３ 同じものを含む順列

○ $aaabb$ の５文字を使って作られる順列の総数は
$${}_5\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_2=10$$

○ $aaabbcc$ の７文字を使って作られる順列の総数は
$${}_7\mathrm{C}_2\times{}_5\mathrm{C}_2=\frac{7\cdot6}{2\cdot1}\times\frac{5\cdot4}{2\cdot1}=210\quad\text{または}\quad\frac{7!}{3!\cdot2!\cdot2!}=\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1\cdot2\cdot1\cdot2\cdot1}=210$$

問　次の展開式において、指定された項を求めよ。

(1) $(a+b)^5$ の展開式における a^3b^2 の項

(解)　求める項は　${}_5\mathrm{C}_2a^3b^2=\dfrac{5\cdot4}{2\cdot1}a^3b^2=10a^3b^2$

(2) $(2x-1)^6$ の展開式における x^3 の項

(解)　求める項は　${}_6\mathrm{C}_3(2x)^3(-1)^3=\dfrac{6\cdot5\cdot4}{3\cdot2\cdot1}\times8x^3\times(-1)=-160x^3$

(3) $(a+b+c)^7$ の展開式における $a^3b^2c^2$ の項

(解)　求める項は　${}_7\mathrm{C}_2\times{}_5\mathrm{C}_2a^3b^2c^2=\dfrac{7\cdot6}{2\cdot1}\times\dfrac{5\cdot4}{2\cdot1}a^3b^2c^2=210a^3b^2c^2$

$$\text{または}\quad\frac{7!}{3!\cdot2!\cdot2!}a^3b^2c^2=\frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1\cdot2\cdot1\cdot2\cdot1}a^3b^2c^2=210a^3b^2c^2$$

3　整式の割り算

AをBで割ったときの商をQ、Rを余りとすると　$A=BQ+R$　と表せる。

問　整式 x^3+2x^2+2x-6 を整式Bで割ると、商が $x-1$、余りが $3x-4$ であるとき、Bを求めよ。

(解)

$x^3+2x^2+2x-6=B\times(x-1)+3x-4$　が成り立つ。
整理すると、$x^3+2x^2-x-2=B\times(x-1)$
よって、$B=(x^3+2x^2-x-2)\div(x-1)$
割り算を計算して　$B=x^2+3x+2$

4 分数式の計算

約分 $\dfrac{A}{B}=\dfrac{AC}{BC}\ (C\neq 0)$、$\dfrac{A\cancel{D}}{B\cancel{D}}=\dfrac{A}{B}$　　乗法・除法 $\dfrac{A}{B}\times\dfrac{C}{D}=\dfrac{AC}{BD}$、$\dfrac{A}{B}\div\dfrac{C}{D}=\dfrac{A}{B}\times\dfrac{D}{C}=\dfrac{AD}{BC}$

加法・減法 $\dfrac{A}{C}+\dfrac{B}{C}=\dfrac{A+B}{C}$ 、$\dfrac{A}{C}-\dfrac{B}{C}=\dfrac{A-B}{C}$

問　次の式を計算せよ。

(1) $\dfrac{x^2+x}{x+2}\div\dfrac{x+1}{x^2-4}=\dfrac{x\cancel{(x+1)}}{\cancel{x+2}}\times\dfrac{\cancel{(x+2)}(x-2)}{\cancel{x+1}}=x(x-2)$

(2) $\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{1}{x-3}=\dfrac{2(x-3)}{(x+1)(x-3)}+\dfrac{x+1}{(x+1)(x-3)}=\dfrac{(2x-6)+(x+1)}{(x+1)(x-3)}=\dfrac{3x-5}{(x+1)(x-3)}$

(3) $\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x^2+x}=\dfrac{2}{(x+1)(x-1)}-\dfrac{1}{x(x+1)}=\dfrac{2x}{x(x+1)(x-1)}-\dfrac{x-1}{x(x+1)(x-1)}$

$$=\dfrac{2x-(x-1)}{x(x+1)(x-1)}=\dfrac{x+1}{x(x+1)(x-1)}=\dfrac{1}{x(x-1)}$$

5 恒等式

1　$ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$ が x についての恒等式である　⇔　$a=a'$、$b=b'$、$c=c'$

2　$ax^2+bx+c=0$ が x についての恒等式である　⇔　$a=b=c=0$

問　次の等式が x についての恒等式となるように、定数 a、b、c の値を求めよ。

(1)　$3x^2+8x+1=(x+2)(ax+b)+c$

（解）

整理すると　$3x^2+8x+1=ax^2+(2a+b)x+(2b+c)$

係数を比較して　$3=a,\ 8=2a+b,\ 1=2b+c$

これを解いて　$a=3,\ b=2,\ c=-3$

(2)　$\dfrac{x+3}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{x+2}$

（解）

等式の両辺に $(x+1)(x+2)$ を掛けて得られる等式

$x+3=a(x+2)+b(x+1)$　が恒等式であればよい。

右辺を整理して　$x+3=(a+b)x+(2a+b)$

両辺の係数を比較して

$1=a+b,\ 3=2a+b$

これを解いて　$a=2,\ b=-1$

6 等式の証明

【$A=B$ の証明の方法】

1　AかBの一方を変形して、他方の式になることを示す。

2　AとBの両方を変形して、同じ式になることを示す。

3　$A-B$を計算して、0 になることを示す。

問　次の等式を証明せよ。

(1)　$(a^2+1)(b^2+1)=(ab+1)^2+(a-b)^2$

（証明）左辺 $=a^2b^2+a^2+b^2+1$

右辺 $=(ab)^2+2ab+1+a^2-2ab+b^2=a^2b^2+a^2+b^2+1$

よって　$(a^2+1)(b^2+1)=(ab+1)^2+(a-b)^2$

(2)　$a+b=c$ のとき、$b^2+c^2=a^2+2bc$

（証明）$c=a+b$ であるから

$$\text{左辺}-\text{右辺}=b^2+c^2-(a^2+2bc)$$
$$=b^2+(a+b)^2-a^2-2b(a+b)$$
$$=0$$

よって　$b^2+c^2=a^2+2bc$

(3)　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$　のとき、　$\dfrac{a+c}{b+d}=\dfrac{a-c}{b-d}$

（証明）

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}=k$　とおくと　$a=bk,\ c=dk$

よって　$\dfrac{a+c}{b+d}=\dfrac{bk+dk}{b+d}=\dfrac{k(b+d)}{b+d}=k,\quad \dfrac{a-c}{b-d}=\dfrac{bk-dk}{b-d}=\dfrac{k(b-d)}{b-d}=k$

したがって　$\dfrac{a+c}{b+d}=\dfrac{a-c}{b-d}$

$\boxed{7}$　不等式の証明

不等式　$A>B$ を証明するには，　$A-B>0$ であることを示せばよい。

【実数の大小関係】

1　$a>b,\ b>c \Rightarrow a>c$　　2　$a>b \Rightarrow a+c>b+c,\ a-c>b-c$

3　$a>b,\ c>0 \Rightarrow ac>bc,\ \dfrac{a}{c}>\dfrac{b}{c}$　　4　$a>b,\ c<0 \Rightarrow ac<bc,\ \dfrac{a}{c}<\dfrac{b}{c}$

【実数の平方の性質】

1　実数 a について　$a^2 \geqq 0$　（等号が成り立つのは，$a=0$　のときである。）

2　実数 $a,\ b$ について　$a^2+b^2 \geqq 0$　（等号が成り立つのは，$a=b=0$　のときである。）

3　$a>0,\ b>0$ のとき　$a^2>b^2 \Leftrightarrow a>b$　，　$a^2 \geqq b^2 \Leftrightarrow a \geqq b$

【絶対値】

定義は　$|a|=\begin{cases} a & (a \geqq 0 \text{ のとき}) \\ -a & (a<0 \text{ のとき}) \end{cases}$

性質　$|a| \geqq 0,\quad |a| \geqq a,\quad |a| \geqq -a,\quad |a|^2=a^2,\quad |ab|=|a||b|$

【相加平均と相乗平均の大小関係】

$a>0,\ b>0$　のとき　$\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$　（等号が成り立つのは，$a=b$ のときである）

＊不等式の証明では、$a+b \geqq 2\sqrt{ab}$　を利用することが多い。

問　次の不等式を証明せよ。

(1)　$x>1,\ y>1$　のとき，　不等式　$xy+1>x+y$　を証明せよ。

（証明）

$(xy+1)-(x+y)=xy-x-y+1=x(y-1)-(y-1)=(x-1)(y-1)$

$x>1.\ y>1$　より，$x-1>0,\ y-1>0$　であるから

$(x-1)(y-1)>0$　　よって　$(xy+1)-(x+y)>0$

したがって　$xy+1>x+y$

(2)　不等式　$a^2+5b^2 \geqq 4ab$　を証明せよ。また、等号が成り立つときを調べよ。

（証明）

$(a^2+5b^2)-4ab=a^2-4ab+5b^2=(a-2b)^2+b^2 \geqq 0$

したがって、$a^2+5b^2 \geqq 4ab$

等号が成り立つのは、$a-2b=0$　かつ　$b=0$，すなわち　$a=b=0$　のときである。

(3)　$a>0,\ b>0$ のとき，不等式　$\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$　を証明せよ。
（証明）
両辺の平方の差を考えると
$$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2-\left(\sqrt{a+b}\right)^2=\left(a+2\sqrt{ab}+b\right)-(a+b)=2\sqrt{ab}>0$$
よって　$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2>\left(\sqrt{a+b}\right)^2$
$\sqrt{a}+\sqrt{b}>0,\ \sqrt{a+b}>0$　であるから
$$\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$$

(4)　不等式　$|a|+|b|\geqq|a+b|$　を証明せよ。また、等号が成り立つときを調べよ。
（証明）
平方の差を考えると
$$\begin{aligned}(|a|+|b|)^2-|a+b|^2&=|a|^2+2|a||b|+|b|^2-(a+b)^2\\&=a^2+2|ab|+b^2-(a^2+2ab+b^2)\\&=2(|ab|-ab)\geqq 0\end{aligned}$$
$\Longleftarrow$ ($|a|\geqq a$ より)
よって　$(|a|+|b|)^2\geqq|a+b|^2$
$|a|+|b|\geqq 0,\ |a+b|\geqq 0$　であるから　$|a|+|b|\geqq|a+b|$
等号が成り立つのは、$|ab|=ab$　すなわち　$ab\geqq 0$　のときである。

(5)　$a>0$ のとき、不等式　$a+\dfrac{1}{a}\geqq 2$　を証明せよ。また、等号が成り立つときを調べよ。
(証明)
$a>0,\dfrac{1}{a}>0$　であるから、相加平均と相乗平均の大小関係により
$$a+\frac{1}{a}\geqq 2\sqrt{a\cdot\frac{1}{a}}=2$$
よって　$a+\dfrac{1}{a}\geqq 2$
等号が成り立つのは、$a>0$　かつ　$a=\dfrac{1}{a}$、すなわち　$a=1$　のときである。

補充１　$a+b+c=0$　のとき、等式　$a^3+b^3+c^3=3abc$　を証明せよ。
（証明）
$c=-(a+b)$　であるから
左辺 $=a^3+b^3-(a+b)^3=a^3+b^3-(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)=-3a^2b-3ab^2$
右辺 $=-3ab(a+b)=-3a^2b-3ab^2$
よって　$a^3+b^3+c^3=3abc$

補充２　$a>0,\ b>0$ のとき、不等式　$(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\geqq 4$　を証明せよ。
（証明）
$a>0,\ b>0,\ \dfrac{1}{a}>0,\ \dfrac{1}{b}>0$　であるから、相加平均と相乗平均の大小関係により
$$(a+b)\geqq 2\sqrt{ab}\ \cdots\cdots①\qquad \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geqq 2\sqrt{\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}}\ \cdots\cdots②$$
①，②の両辺はともに正なので　$(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\geqq 2\sqrt{ab}\times 2\sqrt{\dfrac{1}{ab}}=2\sqrt{ab}\times\dfrac{2}{\sqrt{ab}}=4$
よって　$(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)\geqq 4$
等号が成り立つのは、$a=b$　かつ　$\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{b}$　すなわち　$a=b$　のときである。