1　不定積分

【定義】

関数$f(x)$の原始関数$F(x)$　：　xについて微分して$f(x)$になる関数のこと。$F'(x)=f(x)$

関数$f(x)$の不定積分　：　$\int f(x)\,dx=F(x)+C$　（Cは積分定数）

関数$f(x)$の不定積分を求めることを，$f(x)$を積分するという。

【公式】

nが正の整数または０のとき　$\int x^n dx=\dfrac{1}{n+1}x^{n+1}+C$

【計算法則】

1　$\int kf(x)dx=k\int f(x)dx$　（kは実数）

2　$\int\{f(x)+g(x)\}dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$

3　$\int\{f(x)-g(x)\}dx=\int f(x)dx-\int g(x)dx$

問１　次の不定積分を求めよ。

(1)　$\int(3x^2-6x+2)dx$　　(2)　$\int(x+1)(2x-1)dx$　　(3)　$\int t(3t+1)dt$

問２　次の２つの条件を満たす関数 $F(x)$ を求めよ。

$F'(x)=3(x-1)^2\cdots\cdots$①　　$F(1)=0\cdots\cdots$②

$\int dt$ は，t の関数として積分することなので

$\int(2t+1)dt=t^2+t+C$

$\int(2x+1)dt=(2x+1)t+C$

（$2x+1$ は定数とみなす）

となることに注意。

2　定積分

【定義】

$F'(x)=f(x)$とするとき

関数$f(x)$のaからbまでの定積分　$\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$

【計算法則】

1　$\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$　（kは実数）

2　$\int_a^b\{f(x)+g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$

3　$\int_a^b\{f(x)-g(x)\}dx=\int_a^b f(x)dx-\int_a^b g(x)dx$

【性質】

1　$\int_a^a f(x)dx=0$　　2　$\int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx$　　3　$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$

4　$\dfrac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$　（定積分$\int_a^x f(t)dt$を x で微分すると $f(x)$ になる）

（４の説明）$F'(x)=f(x)$とすると$\int_a^x f(t)dt=[F(t)]_a^x=F(x)-F(a)$　　$F(a)$は定数

$$\left(\int_a^x f(t)dt\right)'=\big(F(x)-F(a)\big)'=\big(F(x)\big)'-\big(F(c)\big)'=F'(x)-0=f(x)$$

問１　次の定積分を求めよ。

(1)　$\displaystyle\int_0^1(-x^2+3x)dx$

(2)　$\displaystyle\int_{-1}^2(x+4)(x-2)dx$

(3)　$\displaystyle\int_0^1(-x^2+3x)dx-\int_0^1(2x^2-x)dx$

問２　等式　$\displaystyle f(x)=4x+3\int_0^1 f(t)dt$　を満たす関数$f(x)$を求めよ。

問３　等式　$\displaystyle\int_a^x f(t)dt=x^2-3x+2$　を満たす関数$f(x)$と定数aの値を求めよ。

$\boxed{3}$　定積分と図形の面積

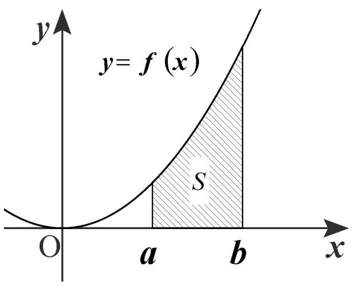
１　$a\leqq x\leqq b$の範囲で$f(x)\geqq 0$のとき
$y=f(x)$のグラフとx軸および２直線
$x=a$，$x=b$で囲まれた部分の面積Sは

$$S=\int_a^b f(x)dx$$

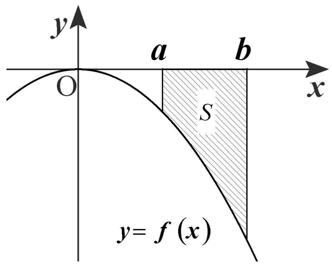
２　$a\leqq x\leqq b$の範囲で$f(x)\leqq 0$のとき
$y=f(x)$のグラフとx軸および２直線
$x=a$，$x=b$で囲まれた部分の面積Sは

$$S=\int_a^b\{-f(x)\}dx=-\int_a^b f(x)dx$$

$f(x)\geqq 0$のとき

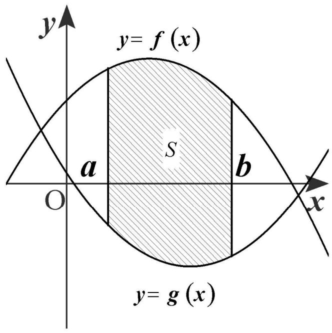


$f(x)\leqq 0$のとき

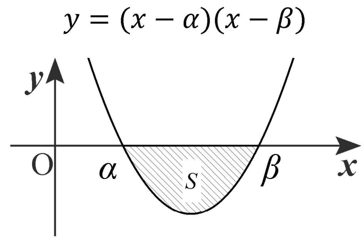


３　$a \leqq x \leqq b$の範囲で$f(x) \geqq g(x)$のとき
$y=f(x)$と$y=g(x)$のグラフおよび２直線
$x=a$，$x=b$で囲まれた部分の面積Sは

$$S=\int_a^b \{f(x)-g(x)\}dx$$



４　$\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$
面積を求める問題でこの公式が利用
できる場合がある。



$$S=-\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx$$

問１　次の部分の面積Sを求めよ。

(1)　放物線$y=x^2+1$，直線$x=1$，$x=2$，x軸
で囲まれた部分。

(2)　放物線$y=x^2-4$，x軸で囲まれた部分。

(3)　２つの放物線$y=x^2-2x$，$y=-x^2+3x$と
２直線$x=1$，$x=2$で囲まれた部分。

問２　次の曲線または直線で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

(1)　放物線 $y = x^2 - 1$，直線 $y = x + 1$ で囲まれた部分。

(2)　2 つの放物線 $y = x^2 - 2x$，$y = -x^2 + 4$ で囲まれた部分。

問３　曲線 $y = x^3 + x^2 - 2x$ と x軸で囲まれた 2 つの部分の面積の和を求めよ。

問４　定積分 $\int_0^3 |x(x-2)|dx$ を求めよ。

参考　定積分の計算について

$F'(x)=f(x)$ のとき

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx=[F(x)]_\alpha^\beta=F(\beta)-F(\alpha)$$ であるが,

次のようにも計算できる。

$$\int_\alpha^\beta (ax^2+bx+c)dx$$
$$=a\int_\alpha^\beta x^2dx+b\int_\alpha^\beta xdx+c\int_\alpha^\beta dx$$
$$=a\left[\frac{1}{3}x^3\right]_\alpha^\beta+b\left[\frac{1}{2}x^2\right]_\alpha^\beta+c[x]_\alpha^\beta$$
$$=\frac{a}{3}[x^3]_\alpha^\beta+\frac{b}{2}[x^2]_\alpha^\beta+c[x]_\alpha^\beta$$
$$=\frac{a}{3}(\beta^3-\alpha^3)+\frac{b}{2}(\beta^2-\alpha^2)+c(\beta-\alpha)$$

この方法での計算が良い場合もある。

（例）

$$\int_{-1}^2 (x^2+3x+2)dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+2x\right]_{-1}^2$$
$$=\frac{1}{3}\{2^3-(-1)^3\}+\frac{3}{2}\{2^2-(-1)^2\}+2\{2-(-1)\}$$
$$=\frac{9}{3}+\frac{9}{2}+2\cdot 3$$
$$=\frac{9}{2}+9$$
$$=\frac{27}{2}$$

公式　$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$

（証明）

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx$$
$$=\int_\alpha^\beta \{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)x^2+\alpha\beta x\right]_\alpha^\beta$$
$$=\frac{1}{3}(\beta^3-\alpha^3)-\frac{1}{2}(\alpha+\beta)(\beta^2-\alpha^2)+\alpha\beta(\beta-\alpha)$$
$$=\frac{2}{6}(\beta-\alpha)(\beta^2+\beta\alpha+\alpha^2)-\frac{3}{6}(\beta-\alpha)(\beta+\alpha)^2+\frac{6}{6}\alpha\beta(\beta-\alpha)$$
$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)\{2(\beta^2+\beta\alpha+\alpha^2)-3(\beta+\alpha)^2+6\alpha\beta\}$$
$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)(-\beta^2+2\beta\alpha-\alpha^2)$$
$$=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

この公式は、2 つの曲線または直線で囲まれた図形の面積を求める場合に利用できる。

（この学習プリントでの該当箇所）

積分法（３）問１の(2)

積分法（４）問２の(1)(2)