

スタート！ 高校数学！



高校数学をスタートする君へ

高校数学をスタートするにあたり、
これまでの自分の数学についての学習を振り返ってみてください。

数学が得意かそうでないか、数学が好きかそうでないか...
状況によって、時間のかけ方や学習方法など、人それぞれだと思います。

おそらく、
高校数学の教科書をひらいた時に見える風景も人それぞれでしょう。

ですが、

ですが、見える風景に人との違いがあることは、
数学を学ぶこと自体には関係ありません。

大切なのは、「**数学を学ぶことで自分が成長する**」ことです。

つまり、「**数学的な考え方を豊かにする**」ことを考えて取り組むことが大切です。

では、自分を数学的に成長させるとはということなのでしょうか？

高校では、数学の問題に取り組むことで、
数学的な考え方を豊かにしていこうとする場面が数多くあります。

それでは、ここで質問です。

ある問題を解いたとき、
次の①と②では、どちらの方が「数学的な考え方を豊かにした」と思いますか？

- ① すぐに解法がわかり、問題が解けた
- ② 解法がわからず、考えたり、調べたり、色々試してみたが問題が解けなかった

 おそらく、①よりも②の方が「数学的な考え方を豊かにした」と思われます。

①も②も、これまで学んだことを生かしたという点では共通しています。

①は、既に身に付けている知識や経験を十分に生かしたと思われます。

②は、問題を解くのに知識や経験が足りなかったわけですが、
既に身に付けている知識や経験を十分に使いつつ、
試行錯誤しながら問題を解こうとしたと思われます。

このことから、「試行錯誤しながらトライした」分、
②の方が「数学的に成長した」と思われます。

数学では「試行錯誤しながらトライ」することがとても大切です。
ですから、数学を学ぶときに心掛けてほしいことは、

考える → 理解する → 使える知識にする

というサイクルです。

高校の授業に置き換えると、例えば、

A. 数学が得意な人は、

予習(考える)⇒授業(理解する)⇒復習(使える知識にする)

B. 数学が得意ではない人は、

授業(考える)⇒復習①(理解する)⇒復習②(使える知識にする)

とすることができます。

A, Bに示したサイクルを,
もっと自分に合ったサイクルに変えたり,
問題のレベルに応じて臨機応変にサイクルを使い分けたりしてもよいでしょう。

大切にしてほしいのは,

考える → 理解する → 使える知識にする

のサイクルで, 数学にしっかり取り組むことです。

そのためのアドバイスが, 次の 1~5 です。

1. 深く考えるほど，たくさん悩むほど，数学的な考えは豊かになる。
粘り強く「**考え**」よう。
2. 「**理解**」した事が「**使える知識**」になるには時間がかかる。
反復しよう。
3. 理解できなくても心を痛めない。誰でもわからないことはある。
そのままにせず，わかるまでトライすることが大事。何回も。
4. 問題が解けなかったときは，なぜ解けなかったのか分析する。
知らなかった？ 計算ミス？ 知識を使えなかった？
5. 毎日一定時間数学に取り組もう。多過ぎず，少な過ぎず。

ここで、
学習を進めるときに活用できる文部科学省のサイトを紹介します。
高校数学に関する動画など、学習支援のための様々なコンテンツがあります。
是非活用してください。

《参考》

学校の臨時休業期間における
自宅での学習を支援するためのコンテンツポータルサイト



文部科学省「子供の学び応援サイト」
検索キーワード（ 文部科学省 子供の学び応援サイト ）

問題を解く！

高校では、答えにたどり着くまでのプロセス(過程)がより重視されます。答の数値が「5」となる問題で、「5」という答えを出したとしても、そこにたどり着くまでのプロセスが正しくなければ、全く評価されません。

君がつくる「答案」は、数学の先生への「お手紙」だと考えると良いでしょう。自分が理解している事、考えた事を、詳しく丁寧に書くという意識をもっていれば大丈夫です。

具体的には、教科書や参考書の説明文などを参考にしつつ、次の3点を意識して答案づくりをすると良いでしょう。

- ①自分の主張の理由や、根拠となる公式の名前をしっかりと書こう
- ②グラフや図をかこう
- ③数学でよく使う文章表現を身に付けよう

ここからは、次の1~4の問題について解説します。

- 1 数学 I 「ルート, 絶対値の計算」の問題
- 2 数学 I 「式の展開」の問題
- 3 数学 I 「因数分解」の問題
- 4 数学 I 「2次関数の最小値(場合分け)」の問題

応用レベルの問題ですので、必要に応じて活用してください。

1 「ルート、絶対値の計算」

問題1. $x = a^2 + 1$ のとき、場合分けをして、次の式を a で表せ。

$$P = \sqrt{x + 2a} + \sqrt{x - 4a + 3}$$

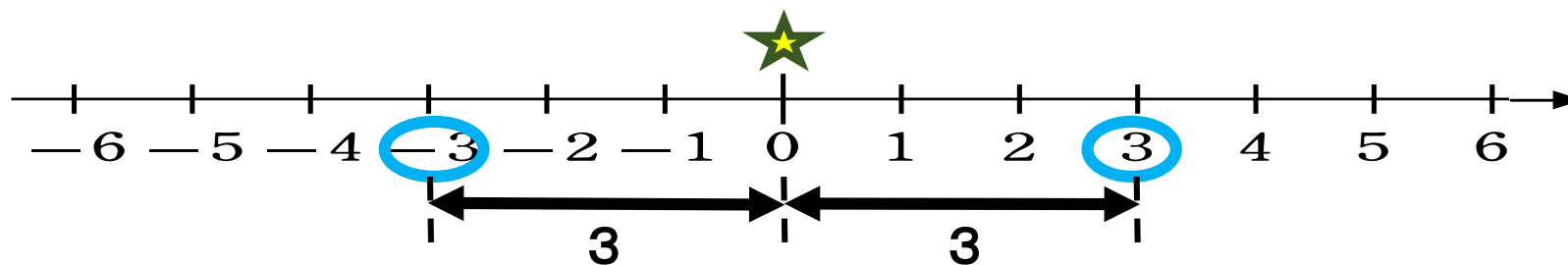
【この問題を解くための基本事項】

まず、 $|a| = \begin{cases} a & (a \geq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$ について、

※ 絶対値 … 数直線上で原点 $O(0)$ と点 $A(a)$ との距離を a の絶対値といい $|a|$ で表します。

下の数直線のとおり $|3| = 3$, $|-3| = 3$ です。

特に、 $|-3| = -(-3) = 3$ のように、絶対値の中が負の数の際は、「-」をつけて絶対値を外したと考えます。



次に、 $\sqrt{a^2} = |a|$ について具体的に確認しましょう。

$a=2$ のときは、 $\sqrt{2^2} = \sqrt{4} = 2$ となり、

$a=-2$ のときは、 $\sqrt{(-2)^2} = \sqrt{4} = 2$ となります。

$\sqrt{(-2)^2}$ は正の数なので、 $\sqrt{(-2)^2} \neq -2$ であることに注意してください。

つまり、 $\sqrt{a^2} = a$ とできるのは $a \geq 0$ のときだけです。

$a < 0$ のときは、 $\sqrt{a^2} = -a$ となります。

したがって、絶対値の公式と合わせて $\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & (a \geq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$

ルートを外すときは符号に気を付けてください。

解答は、

【解答】

$$\begin{aligned} P &= \sqrt{a^2 + 1 + 2a} + \sqrt{a^2 + 1 - 4a + 3} \\ &= \sqrt{a^2 + 2a + 1} + \sqrt{a^2 - 4a + 4} \\ &= \sqrt{(a+1)^2} + \sqrt{(a-2)^2} \\ &= |a+1| + |a-2| \end{aligned}$$

- [1] $a < -1$ のとき $a+1 < 0, a-2 < 0$
よって $P = -(a+1) - (a-2) = -2a+1$
- [2] $-1 \leq a < 2$ のとき $a+1 \geq 0, a-2 < 0$
よって $P = (a+1) - (a-2) = 3$
- [3] $a \geq 2$ のとき $a+1 \geq 0, a-2 \geq 0$
よって $P = (a+1) + (a-2) = 2a-1$

以上から $a < -1$ のとき $P = -2a+1,$
 $-1 \leq a < 2$ のとき $P = 3,$
 $2 \leq a$ のとき $P = 2a-1$

a の値の変化と $a+1, a-2$ の符号を表にすると

a	-1	2
$a+1$	-	0	+	+	+
$a-2$	-	-	-	0	+

2 「式の展開」

問題2. 次の式を展開せよ。 $(a - b + c - d)(a + b - c - d)$

【この問題を解くための基本事項】

展開公式 $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$ を使います。

「式の展開」は、公式を知らなくても丁寧にかけ算をすれば答を出すことができます。

しかし、公式を使うと、素早く計算ミスをしなくて答を出すことができます。

公式をしっかりと覚えて、的確に使って計算しましょう。

問題2の式の左側の()と右側の()に含まれる同じ文字の符号に着目すると、符号が同じ文字(項)と異なる文字(項)があることがわかります。

その符号を確認し、符号が同じ文字(項)と異なる文字(項)に分けて整理します。

具体的には、

$$(a - b + c - d)(a + b - c - d)$$

このように、式の左側の () と右側の () の各項を比較すると、
a と d については、a と a、-d と -d というように符号が同じです。
b と c については、-b と b、c と -c というように符号が異なります。

よって、同じ符号どうしの a, d と、
異なる符号どうしの b, c の組に分けます。

$$(a - b + c - d)(a + b - c - d) = (a - d - b + c)(a - d + b - c)$$

a, d を前の方へ、b, c を後ろの方へ集めて、
符号に注意しながら計算を進めてください。

$$\longrightarrow = \{(a - d) - (b - c)\} \{(a - d) + (b - c)\}$$

解答は、

【解答】

$$\begin{aligned}(a - b + c - d)(a + b - c - d) &= (a - d - b + c)(a - d + b - c) \\ &= \{(a - d) - (b - c)\}\{(a - d) + (b - c)\} \\ &= (a - d)^2 - (b - c)^2 \\ &= a^2 - b^2 - c^2 + d^2 - 2ad + 2bc\end{aligned}$$

3 「因数分解」

問題 3. 次の式を因数分解せよ。

(1) ① $xyz + x^2y^2 - 2xy - 2z$

② $a^2b + ca^2 + ab^2 + b^2c + c^2a + bc^2 + 2abc$

(2) $2x^2 - 3xy + y^2 - 7x + 4y + 3$

(3) ① $x^4 - 5x^2 + 4$

② $x^4 + 3x^2 + 4$

【この問題を解くための基本事項】

因数分解は、高校数学のあらゆる分野で必要とされます。

因数分解は、式の特徴から対応の仕方が全て決まっているといっても過言ではありません。
直感的に式変形をするのではなく、**対応の仕方をしっかり身に付ける**ことが大切です。

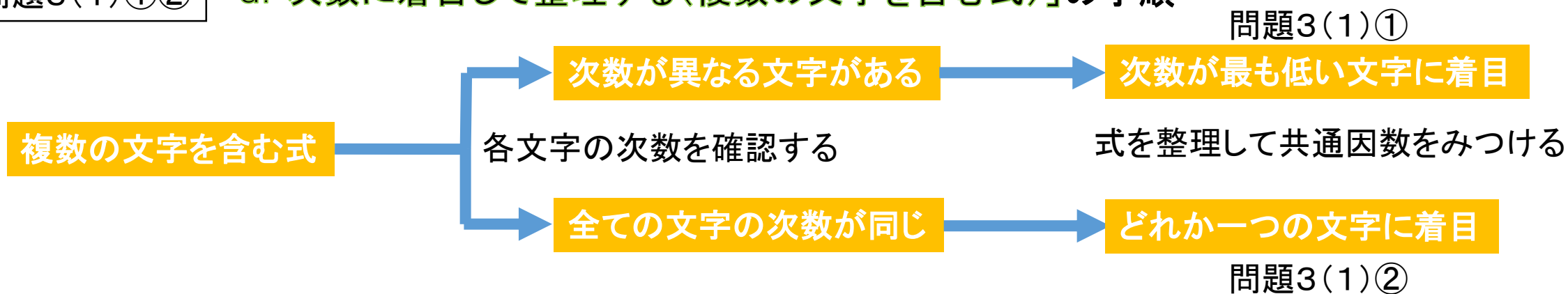
対応の仕方が身に付いていないときは、次のa~eを参考にしてください。

- a. 共通因数をみつけてくり出す
- b. 公式の利用を考える
- c. たすき掛けをする(2次式)
- d. 次数に着目して整理する(複数の文字を含む式)
- e. 「(2乗) - (2乗)」に変形する(複2次式)

今回の問題は、c, d, eの内容です。

a, bの問題については、教科書や参考書で確認してください。

問題3(1)①② 「d. 次数に着目して整理する(複数の文字を含む式)」の手順



問題3(2) 「c. たすき掛けをする(2次式)」の手順

xまたはyの2次式として整理する

xの2次式として整理する場合

$$2x^2 - 3xy + y^2 - 7x + 4y + 3 = 2x^2 + (-3y - 7)x + y^2 + 4y + 3 \leftarrow \text{yを係数と考える}$$

$$= 2x^2 + (-3y - 7)x + \underline{(y+1)(y+3)} \leftarrow \text{たすき掛けの準備}$$

yの2次式を因数分解



たすき掛けをして
因数分解

yの2次式として整理する場合

$$2x^2 - 3xy + y^2 - 7x + 4y + 3 = y^2 + (-3x + 4)y + 2x^2 - 7x + 3 \leftarrow \text{xを係数と考える}$$

$$= y^2 + (-3x + 4)y + \underline{(x-3)(2x-1)} \leftarrow \text{たすき掛けの準備}$$

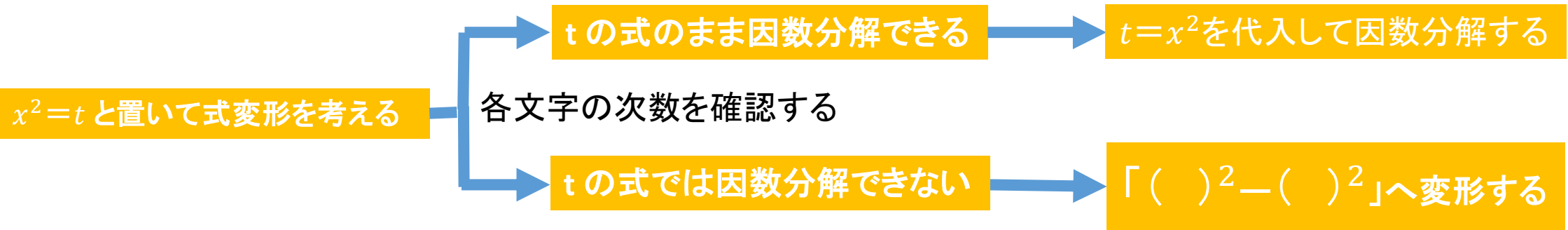
xの2次式を因数分解



たすき掛けをして
因数分解

問題3(3)①②

「e. 「(2乗) - (2乗)」に変形する(複2次式)」の手順



問題3(3)①の場合

$x^2 = t$ とおくと

$$x^4 - 5x^2 + 4 = \underline{(x^2)^2 - 5x^2 + 4} = t^2 - 5t + 4 = \underline{(t-1)(t-4)}$$

問題3(3)②の場合

$x^2 = t$ とおくと

$$x^4 + 3x^2 + 4 = \underline{(x^2)^2 + 3x^2 + 4} = t^2 + 3t + 4$$

x の式で「()² - ()²」へ変形！

この t の 2 次式は、有理数の範囲でこれ以上因数分解できない！

【解答】 (1)① $xyz + x^2y^2 - 2xy - 2z$
 $= xyz - 2z + x^2y^2 - 2xy$
 $= (xy - 2)z + (x^2y^2 - 2xy)$
 $= (xy - 2)z + xy(xy - 2)$
 $= (xy - 2)(xy + z)$

(1)② $a^2b + ca^2 + ab^2 + b^2c + c^2a + bc^2 + 2abc$
 $= a^2b + ca^2 + ab^2 + 2abc + c^2a + b^2c + bc^2$
 $= (b + c)a^2 + (b^2 + 2bc + c^2)a + bc(b + c)$
 $= (b + c)a^2 + (b + c)^2a + bc(b + c)$
 $= (b + c)\{a^2 + (b + c)a + bc\}$
 $= (b + c)(a + b)(a + c)$

(2) x の 2 次式として整理する場合

$$2x^2 - 3xy + y^2 - 7x + 4y + 3$$

$$= 2x^2 + (-3y - 7)x + y^2 + 4y + 3$$

$$= 2x^2 + (-3y - 7)x + (y + 1)(y + 3)$$

$$= \{x - (y + 3)\}\{2x - (y + 1)\}$$

$$= (x - y - 3)(2x - y - 1)$$

1	\times	$-(y + 3)$	\longrightarrow	$-2y - 6$
2	\times	$-(y + 1)$	\longrightarrow	$-y - 1$
2		$(y + 1)(y + 3)$		$-3y - 7$

【解答】つづき (2) y の 2 次式として整理する場合

$$\begin{aligned} & 2x^2 - 3xy + y^2 - 7x + 4y + 3 \\ &= y^2 + (-3x + 4)y + 2x^2 - 7x + 3 \\ &= y^2 + (-3x + 4)y + (x - 3)(2x - 1) \quad \dots[A] \\ &= \{y - (x - 3)\}\{y - (2x - 1)\} \quad \dots[B] \\ &= (-x + y + 3)(-2x + y + 1) \\ &= (x - y - 3)(2x - y - 1) \end{aligned}$$

[A]	1	\times	-3	\longrightarrow	-6
	2	\times	-1	\longrightarrow	-1
	<hr/>		2	3	-7

[B]	1	\times	$-(x - 3)$	\longrightarrow	$-x + 3$
	1	\times	$-(2x - 1)$	\longrightarrow	$-2x + 1$
	<hr/>		1	$(x - 3)(2x - 1)$	$-3x + 4$

(3)① $x^2 = t$ とおくと

$$\begin{aligned} x^4 - 5x^2 + 4 &= (x^2)^2 - 5x^2 + 4 \\ &= t^2 - 5t + 4 \\ &= (t - 1)(t - 4) \\ &= (x^2 - 1)(x^2 - 4) \\ &= (x + 1)(x - 1)(x + 2)(x - 2) \end{aligned}$$

(3)② $x^4 + 3x^2 + 4 = (x^4 + 4x^2 + 4) - x^2$

$$\begin{aligned} &= (x^2 + 2)^2 - x^2 \\ &= (x^2 + 2 + x)(x^2 + 2 - x) \\ &= (x^2 + x + 2)(x^2 - x + 2) \end{aligned}$$

4 「2次関数の最小値(場合分け)」

問題 4. a は定数とする。 a の値を $0 \leq a \leq 2$ の範囲で変化させたとき、
 x の 2 次関数 $y = x^2 - 2ax + 2a^2 + 1$ の最小値 m を求めよ。

【この問題を解くための基本事項】

最大値・最小値の問題を解くときに、特に注意する点は、

- ① 定義域を確認する
- ② グラフをかいて、判断した根拠を示す の2つです。

また、最大値・最小値の場合分けについては、
最大および最小となる x の値が異なるときに、
最大・最小の状況が異なると判断して別々に考えて、場合分けをします。

これは、関数において x の値が異なれば、関数値 (y の値) が異なるからです。
そして、定義域内のグラフの特徴にも違いがあります。

2次関数において、最大・最小となるのは、
2次関数のグラフの「端点」または「頂点」です。

このことから

- ・定義域が定数 a などの文字を含む問題
- ・軸の方程式が定数 a などの文字を含む問題

は、場合分けを意識して解答を進めていく必要があります。

この問題では、

$$y = x^2 - 2ax + 2a^2 + 1$$

$$= (x^2 - 2ax + a^2) + a^2 + 1$$

$$= (x - a)^2 + a^2 + 1$$

軸の方程式 $x = a$

軸の方程式が文字を含む！

場合分け！

そして、定義域からグラフの端点は、 $x=0$ と $x=2$ であるから、
グラフが下に凸であることを考えると、最小値は $x=a$, $x=0$, $x=2$ のいずれかである。

これをヒントに問題を解いてみよう。

解答は、

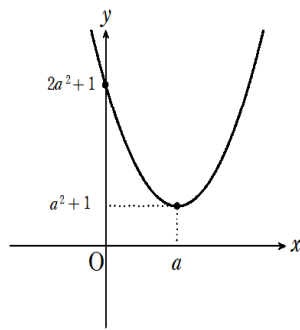
【解答】 $y = x^2 - 2ax + 2a^2 + 1$

$$= (x^2 - 2ax + a^2) + a^2 + 1$$

$$= (x - a)^2 + a^2 + 1$$

よって、軸の方程式は $x = a$

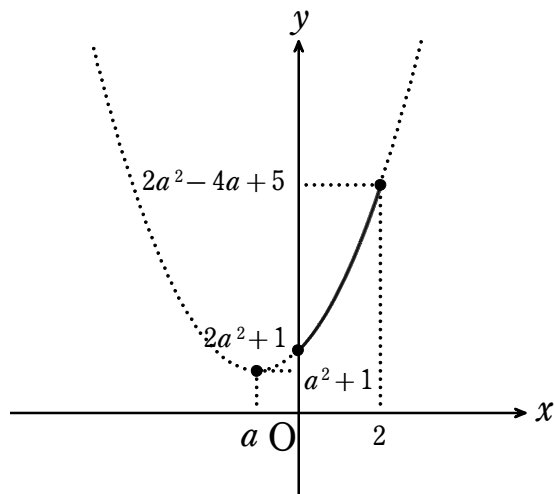
頂点の座標は $(a, a^2 + 1)$



[1] $a < 0$ のとき

下のグラフから、

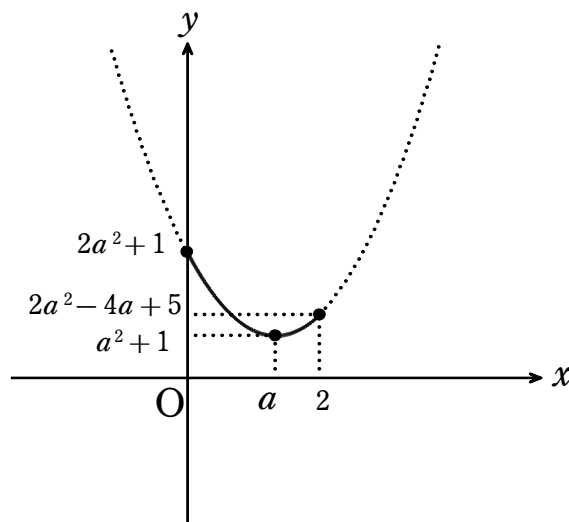
最小値は $x = 0$ のとき $m = 2a^2 + 1$



[2] $0 \leq a \leq 2$ のとき

下のグラフから、

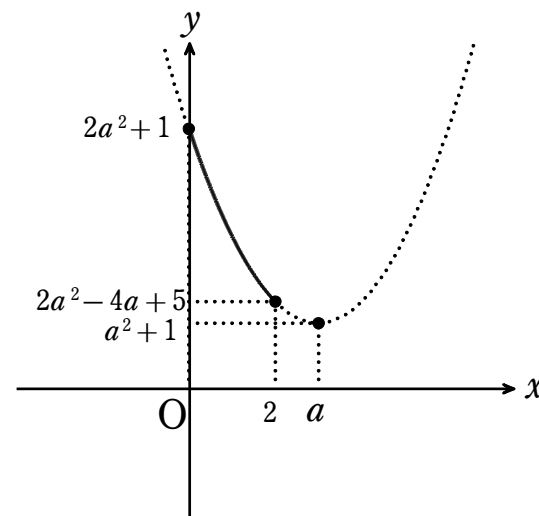
最小値は $x = a$ のとき $m = a^2 + 1$



[3] $a > 2$ のとき

下のグラフから、

最小値は $x = 2$ のとき $m = 2a^2 - 4a + 5$



したがって[1][2][3]から求める最小値 m は、

$$\begin{cases} a < 0 \text{ のとき} & m = 2a^2 + 1 \quad (x = 0 \text{ のとき}) \\ 0 \leq a \leq 2 \text{ のとき} & m = a^2 + 1 \quad (x = a \text{ のとき}) \\ a > 2 \text{ のとき} & m = 2a^2 - 4a + 5 \quad (x = 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

スタート！ 高校数学！

最後までご覧いただき、ありがとうございました。

考える → 理解する → 使える知識にする