数学Ⅱ　第５章　指数関数と対数関数（１）　　　　年　　組　　番・氏名

1　累乗根

【定義】
aを実数，nを正の整数とする。
　aの n乗根 ： n乗してaになる数。つまり，方程式 $x^n = a$ の解である。
　aの累乗根 ： aの 2 乗根，3 乗根，4 乗根，$\cdots$の総称である。

問　次の累乗根を求めよ。

(1)　4 の 2 乗根（平方根）
（解）
$x^2 = 4$ より $x = \pm\sqrt{4} = \pm 2$
ゆえに，4 の 2 乗根は　2，-2

(2)　-8 の 3 乗根
（解）
$x^3 = -8$ より $x^3 + 2^3 = 0$
$(x+2)(x^2 - 2x + 4) = 0$
$x + 2 = 0$ または $x^2 - 2x + 4 = 0$
$x = -2$ または $x = 1 \pm \sqrt{3}i$
ゆえに，8 の 3 乗根は -2，$1 + \sqrt{3}i$，$1 - \sqrt{3}i$

(3)　16 の 4 乗根
（解）
$x^4 = 16$ より $x^4 - 16 = 0$
$(x^2 - 4)(x^2 + 4) = 0$
$(x+2)(x-2)(x^2+4) = 0$
$x + 2 = 0$ または $x - 2 = 0$ または $x^2 + 4 = 0$
$x = \pm 2$ または $x^2 = -4$
$x^2 = -4$ から $x = \pm\sqrt{-4} = \pm 2i$
ゆえに，16 の 4 乗根は　2，-2，$2i$，$-2i$

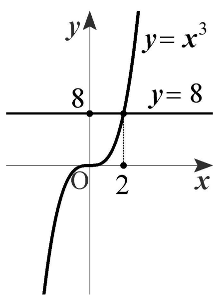
【累乗根のうち実数であるもの】　この章では、累乗根は実数の範囲で考えるものとする
aを実数，nを正の整数とする。
方程式 $x^n = a$ の実数解（n乗根）は，$y = x^n$のグラフと直線 $x = a$ の共有点のx座標である。
aのn乗根について，次のことが成り立つ。

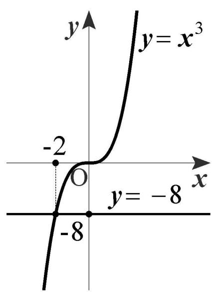
1　n が奇数のとき
ただ 1 つ存在する ⇒ この数を $\sqrt[n]{a}$で表す

（例）
$x^3 = 8$ の実数解は
　$2 = \sqrt[3]{8}$

$x^3 = 8$ の実数解は
　$-2 = \sqrt[3]{-8}$

※　$\sqrt[3]{-8} = -\sqrt[3]{8}$ が成り立つ

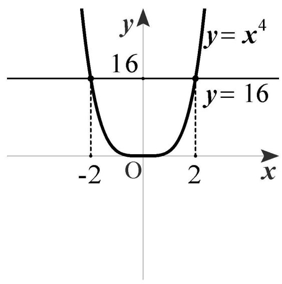


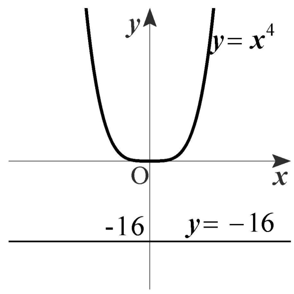


2　n が偶数のとき
$a > 0$ のとき，符号違いの 2 つが存在する
　⟹ この 2 数を $\sqrt[n]{a}$，$-\sqrt[n]{a}$ で表す
$a < 0$ のとき，存在しない

（例）
$x^4 = 16$ の実数解は
　$2 = \sqrt[4]{16}$
　$-2 = -\sqrt[4]{16}$

$x^4 = -16$ の実数解は
　存在しない
$\left(\sqrt[4]{-16}\text{は存在しない}\right)$





問　次の値を求めよ。

(1)　$\sqrt[3]{27}$
　$= \sqrt[3]{3^3}$
　$= 3$

(2)　$\sqrt[3]{-125}$
　$= -\sqrt[3]{5^3}$
　$= -5$

(3)　$\sqrt[4]{81}$
　$= \sqrt[4]{3^4}$
　$= 3$

(4)　$\sqrt[5]{32}$
　$= \sqrt[5]{2^5}$
　$= 2$

【累乗根の定義から】

$a>0$ で，nは正の整数とする。

$\sqrt[n]{a}>0$，　$-\sqrt[n]{a}<0$，　$\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a$，　$\sqrt[n]{a^n}=a$

【累乗根の性質】

$a>0$，$b>0$ で，m，n，p は正の整数とする。

1 $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{ab}$　　2 $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$　　3 $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m}$　　4 $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[mn]{a}$　　5 $\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}$

問　次の式を計算せよ。

(1)　$\sqrt[3]{4}\times\sqrt[3]{16}=\sqrt[3]{4\times4^2}=\sqrt{4^3}=4$

(2)　$\dfrac{\sqrt[6]{10}}{\sqrt[6]{2}}=\sqrt[6]{\dfrac{10}{2}}=\sqrt[6]{5}$

(3)　$\sqrt[3]{40}=\sqrt[3]{8\times5}=\sqrt[3]{8}\times\sqrt[3]{5}=2\sqrt[3]{5}$

(4)　$\sqrt{\sqrt[3]{49}}=\sqrt[6]{7^2}=\sqrt[3]{7}$

2　指数法則

【定義】

指数が有理数のときにも指数法則が使えるように，次のように定める。

$a>0$ で，m，n は正の整数，p は正の有理数とする。

$a^0=1$，　$a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$，　$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$，　$a^{-p}=\dfrac{1}{a^p}$

【指数法則】

$a>0$，$b>0$ で，p，q は有理数とする。

1 $a^p\times a^q=a^{p+q}$　　2 $\dfrac{a^p}{a^q}=a^{p-q}$　　3 $(a^p)^q=a^{pq}$　　4 $(ab)^p=a^pb^p$

問　次の式を計算せよ。

(1)　$5^{\frac{2}{3}}\times5^{\frac{4}{3}}=5^{\frac{2}{3}+\frac{4}{3}}=5^{\frac{6}{3}}=5^2=25$

(2)　$\left(4^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}=4^{\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}}=4^{\frac{1}{2}}=(2^2)^{\frac{1}{2}}=2^1=2$

(3)　$8^{\frac{1}{2}}\times8^{\frac{1}{3}}\div8^{\frac{1}{6}}=8^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}}=8^{\frac{2}{3}}=(2^3)^{\frac{2}{3}}=2^2=4$

(4)　$\sqrt{2}\times\sqrt[3]{2}\times\sqrt[6]{2}=2^{\frac{1}{2}}\times2^{\frac{1}{3}}\times2^{\frac{1}{6}}=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}=2^1=2$

3　指数関数のグラフ

$a>0$，$a\neq1$ のとき，関数 $y=a^x$ を，aを底とする指数関数という。

1　定義域は実数全体。値域は正の実数全体。

2　グラフは点$(0,\ 1)$ および 点$(1,\ a)$を通り、x軸が漸近線となる。

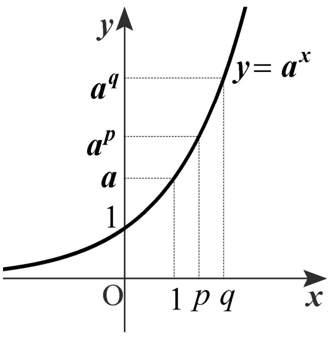
3　増加・減少について

(1)　$a>1$ のとき

増加関数である

x の値が増加すると
y の値も増加する

$p<q\quad\Leftrightarrow\quad a^p<a^q$
（大小関係は同じ）

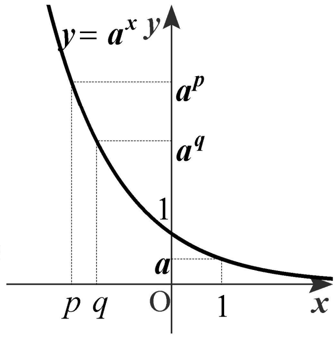


(2)　$0<a<1$ のとき

減少関数である

x の値が増加すると
y の値は減少する

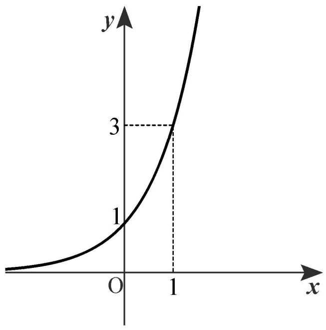
$p<q\quad\Leftrightarrow\quad a^p>a^q$
（大小関係は逆）



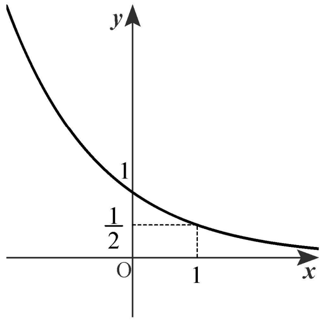
4　相等関係　$a^p=a^q\quad\Leftrightarrow\quad p=q$

問１　次の関数のグラフをかけ。

(1)　$y = 3^x$



(2)　$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



問２　３つの数 $\sqrt{2}$，$\sqrt[3]{4}$，$\sqrt[5]{8}$ の大小を比較せよ。

（解）

３つの数を指数の形で表すと　$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$，$\sqrt[3]{4} = (2^2)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{2}{3}}$，$\sqrt[5]{8} = (2^3)^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{3}{5}}$

指数の大小を比較すると　$\frac{1}{2} < \frac{3}{5} < \frac{2}{3}$

底２は１より大きいから　$2^{\frac{1}{2}} < 2^{\frac{3}{5}} < 2^{\frac{2}{3}}$　すなわち　$\sqrt{2} < \sqrt[5]{8} < \sqrt[3]{4}$

問３　次の方程式を解け。

(1)　$8^x = 4$

（解）

$(2^3)^x = 2^2$

$2^{3x} = 2^2$

$3x = 2$

$x = \frac{2}{3}$

(2)　$9^x = 3^{x+1}$

（解）

$(3^2)^x = 3^{x+1}$

$3^{2x} = 3^{x+1}$

$2x = x + 1$

$x = 1$

(3)　$4^x - 3 \cdot 2^x - 4 = 0$

（解）

$4^x = (2^2)^x = 2^{2x} = (2^x)^2$

ここで，$2^x = t$とおくと　$t > 0$ であり

与式は $t^2 - 3t - 4 = 0$

$(t - 4)(t + 1) = 0$

$t > 0$ より　$t = 4$

$2^x = 4 = 2^2$　ゆえに　$x = 2$

問４　次の不等式を解け。

(1)　$2^x \geqq 8$

（解）

$2^x \geqq 2^3$

底２は１より大きいので　$x \geqq 3$

(2)　$\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} < \left(\frac{1}{9}\right)^x$

（解）

$\left(\frac{1}{9}\right)^x = \left\{\left(\frac{1}{3}\right)^2\right\}^x = \left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$ より

与式は　$\left(\frac{1}{3}\right)^{x+1} < \left(\frac{1}{3}\right)^{2x}$

底$\frac{1}{3}$は１より小さいので　$x + 1 > 2x$

これを解いて　$x < 1$

(3)　$9^x - 4 \cdot 3^x + 3 > 0$

（解）

$9^x = (3^2)^x = 3^{2x} = (3^x)^2$

ここで，$3^x = t$とおくと　$t > 0$ であり

与式は $t^2 - 4t + 3 > 0$

$(t - 1)(t - 3) > 0$

$t < 1$，$3 < t$

$t > 0$ であるから　$0 < t < 1$，$3 < t$

ゆえに　$0 < 3^x < 3^0$，$3^1 < 3^x$

底３は１より大きいので

$x < 0$，$1 < x$

4　対数

【定義】

$a>0$，$a \neq 1$，Mを正の実数とする。

$\log_a M$ ：aを底とするMの対数　（aを何乗するとMになるか？、その指数のこと）

Mを真数という。（ Mは正の実数 ）

（注）$\log_a M = p$ とすると，$a^p = M$　（$a^{\log_a M} = M$ また　$\log_a a^p = p$）

（注）$\log_a 1 = \log_a a^0 = 0$，$\log_a a = \log_a a^1 = 1$

【対数の性質】

$M>0$，$N>0$，kは実数とする。

１ $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$　　２ $\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$　　３ $\log_a M^k = k \log_a M$

【底の変換公式】

a，b，cは正の整数で，$a \neq 1$，$c \neq 1$ とするとき　$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

問１　次の式を $\log_a M = p$ の形にせよ。

(1)　$2^3 = 8$　⇒　$\log_2 8 = 3$（2 の何乗が 8 か？）

(2)　$3^{-2} = \dfrac{1}{9}$　⇒　$\log_3 \dfrac{1}{9} = -2$（3 の何乗が$\dfrac{1}{9}$か？）

問２　次の式を $a^p = M$ の形にせよ。

(1)　$\log_3 81 = 4$　⇒　$3^4 = 81$

(2)　$\log_2 \dfrac{1}{16} = -4$　⇒　$2^{-4} = \dfrac{1}{16}$

問３　次の値を求めよ。

(1) $\log_5 25 = \log_5 5^2 = 2$　　(2) $\log_3 \dfrac{1}{27} = \log_3 3^{-3} = -3$　　(3) $\log_2 \sqrt[3]{2} = \log_2 2^{\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{3}$

問４　次の式を計算せよ。

(1) $\log_{10} 2 + \log_{10} 5 = \log_{10} 2 \cdot 5 = \log_{10} 10 = 1$

(2) $\log_2 24 - \log_2 3 = \log_2 \dfrac{24}{3} = \log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$

(3) $2\log_3 4 + \log_3 5 - \log_3 8$

$= \log_3 4^2 + \log_3 5 - \log_3 8$

$= \log_3 \dfrac{4^2 \cdot 5}{8} = \log_3 10$

問５　次の式を簡単にせよ。（底の変換公式利用）

(1) $\log_2 3 \cdot \log_3 8 = \log_2 3 \times \dfrac{\log_2 8}{\log_2 3}$

$= \log_2 3 \times \dfrac{\log_2 2^3}{\log_2 3} = \log_2 2^3 = 3$

(1) $\log_2 3 - \log_4 9 = \log_2 3 - \dfrac{\log_2 9}{\log_2 4} = \log_2 3 - \dfrac{\log_2 3^2}{\log_2 2^2}$

$= \log_2 3 - \dfrac{2\log_2 3}{2} = \log_2 3 - \log_2 3 = 0$

3　対数関数のグラフ

$a>0$，$a \neq 1$ のとき，関数 $y = \log_a x$ を，aを底とする対数関数という。

1　定義域は正の実数全体。値域は実数全体。

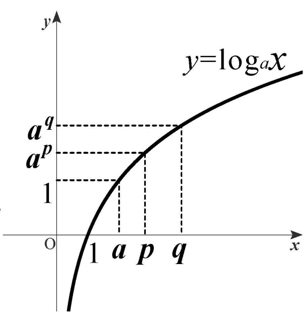
2　グラフは点$(1,\ 0)$ および 点$(a,\ 1)$を通り、y軸が漸近線となる。

3　増加・減少について

(1)　$a>1$ のとき

増加関数である
x の値が増加すると
y の値も増加する

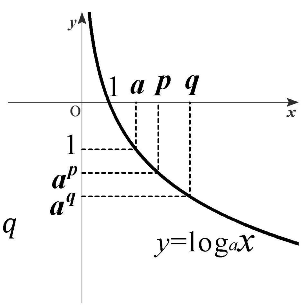
$0<p<q \iff \log_a p < \log_a q$
（大小関係は同じ）



(2)　$0<a<1$ のとき

減少関数である
x の値が増加すると
y の値は減少する

$0<p<q \iff \log_a p > \log_a q$
（大小関係は逆）



4　相等関係　$\log_a p = \log_a q$　⇔　$p = q$

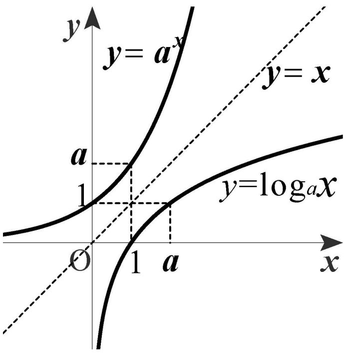
【指数関数と対数関数の関係】

指数関数 $y=a^x$　$\longrightarrow$　$x=\log_a y$　$\longrightarrow$　xとyを入れ替えて　$\longrightarrow$　対数関数 $y=\log_a x$

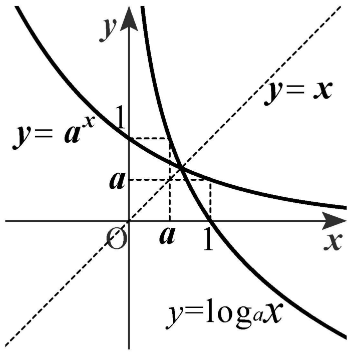
ゆえに，指数関数と対数関数は逆関数の関係である。

（注）この 2 つの関数のグラフは，直線 $y=x$ に関して対称である。

(1)　$a>1$ のとき

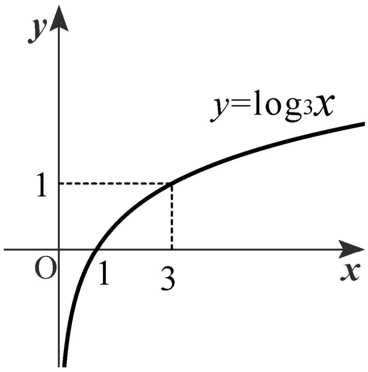


(2)　$0<a<1$ のとき

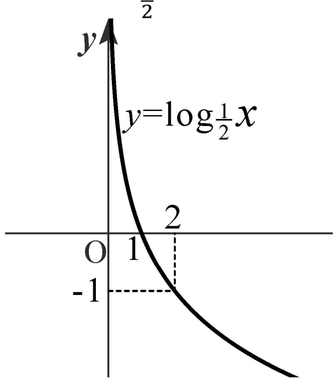


問１　次の関数のグラフをかけ。

(1)　$y=\log_3 x$



(2)　$y=\log_{\frac{1}{2}} x$



問２　次の 2 つの数の大小を不等号を用いて表せ。

$2\log_5 3$，$3\log_5 2$

（解）

$2\log_5 3=\log_5 3^2=\log_5 9$

$3\log_5 2=\log_5 2^3=\log_5 8$

底 5 は 1 より大きいから

$\log_5 8<\log_5 9$

すなわち　$3\log_5 2<2\log_5 3$

問３　次の方程式を解け。

(1)　$\log_2 x=3$

（解）

対数の定義より，$x=2^3=8$

（別解）

予式を変形して，$\log_2 x=\log_2 2^3$

ゆえに　$x=2^3=8$

（注）$p=\log_a a^p$

(2)　$\log_3 x+\log_3(x-8)=2$

（解）

真数は正であるから　$x>0$，$x-8>0$

すなわち　$x>8$……①

予式を変形すると　$\log_3 x(x-8)=2$

よって　$x(x-8)=3^2$

$x^2-8x-9=0$

$(x+1)(x-9)=0$　　①より　$x=9$

※　方程式・不等式の問題では，必ず最初に真数条件（真数は正）を使うこと。

１　方程式の場合

$\log_a M+\log_a N$……①のとき

真数は正なので　$M>0$ かつ $N>0$

$\log_a MN$……②のとき

真数は正なので　$MN>0$　つまり

$M>0$ かつ $N>0$　または　$M<0$ かつ $N<0$

①と②では M，Nの条件が異なるので，$\log_a M+\log_a N$ を $\log_a MN$ に変形する前に必ず真数条件を使うこと。例えば $\log_4(-2)+\log_4(-8)$ は存在しないが，$\log_4(-2)(-8)=\log_4 16=2$ は存在する。

２　不等式の場合

$\log_3 x<\log_3 5$ のとき，真数条件を使わないと $x<5$ となり，xは負の数も含んでしまうので，必ず最初に真数条件を使う。

問４　次の不等式を解け。

(1)　$\log_2 x \leqq 3$

（解）

真数は正なので　$x>0$……①

不等式を変形すると　$\log_2 x \leqq \log_2 2^3$

つまり　$\log_2 x \leqq \log_2 8$

底 2 は 1 より大きいから　$x \leqq 8$……②

①，②の共通範囲を求めて　$0<x\leqq 8$

(2)　$\log_{\frac{1}{2}}(x-1)>2$

（解）

真数は正なので　$x-1>0$　つまり　$x>1$……①

不等式を変形すると　$\log_{\frac{1}{2}}(x-1)>\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^2$

底 2 は 1 より小さいから　$x-1<\left(\frac{1}{2}\right)^2$

これを解いて　$x<\frac{5}{4}$……②

①，②の共通範囲を求めて　$0<x<\frac{5}{4}$

(3)　不等式 $2\log_2(x-4)<\log_2 2x$

（解）

真数は正であるから　$x-4>0$，$2x>0$ より

$x>4$……①

予式は　$\log_2(x-4)^2<\log_2 2x$

底 2 は 1 より大きいので $(x-4)^2<2x$

$x^2-8x+16<2x$

$x^2-10x+16<0$

$(x-2)(x-8)<0$

$2<x<8$……②

①，②より　$4<x<8$

4　常用対数

【常用対数（10 を底とする対数）の利用】

1　Nがn桁の数　$\Leftrightarrow$　$n-1\leqq \log_{10}N<n$

2　Nは小数第n位に初めて 0 でない数が現れる　$\Leftrightarrow$　$-n\leqq \log_{10}N<-(n-1)$

（１の説明）

1 桁	$1\leqq N\leqq 9\quad<10$	$10^0\leqq N<10^1$
2 桁	$10\leqq N\leqq 99\quad<100$	$10^1\leqq N<10^2$
3 桁	$100\leqq N\leqq 999<1000$	$10^2\leqq N<10^3$
	⋮	⋮
n桁	………………………	$10^{n-1}\leqq N<10^n$

（２の説明）

第 1 位	$0.1\leqq N\leqq 0.99\cdots<1$	$10^{-1}\leqq N<10^0$
第 2 位	$0.01\leqq N\leqq 0.09\cdots<0.1$	$10^{-2}\leqq N<10^{-1}$
第 3 位	$0.001\leqq N\leqq 0.009\cdots<0.01$	$10^{-3}\leqq N<10^{-2}$
	⋮	⋮
第n位	………………………	$10^{-n}\leqq N<10^{-(n-1)}$

問１　3^{20}は何桁の数か調べよ。

ただし、$\log_{10}3=0.4771$ とする。

（解）$\log_{10}3^{20}=20\log_{10}3$

$=20\times 0.4771=9.542$

$9<\log_{10}3^{20}<10$　なので

$\log_{10}10^9<\log_{10}3^{20}<\log_{10}10^{10}$

底 10 は 1 より大きいので

$10^9<3^{20}<10^{10}$

よって　3^{20}は 10 桁の数である。

問２　$\left(\frac{1}{2}\right)^{30}$ を小数で表したとき，小数第何位に初めて 0 でない数が現れるか。ただし、$\log_{10}2=0.3010$ とする。

（解）$\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{30}=30\log_{10}2^{-1}=-30\ \log_{10}2$

$=-30\times 0.3010=-9.030$

$-10<\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{30}<-9$　なので

$\log_{10}10^{-10}<\log_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{30}<\log_{10}10^{-9}$

底 10 は 1 より大きいので　$10^{-10}<\left(\frac{1}{2}\right)^{30}<10^{-9}$　よって

$\left(\frac{1}{2}\right)^{30}$ は小数第 10 位に初めて 0 でない数が現れる。

補充問題

$\log_{10}2=a$，$\log_{10}3=b$ のとき，次の式をa，bを用いて表せ。

(1)　$\log_{10}\sqrt[3]{6}$

（解）$\log_{10}\sqrt[3]{6}=\log_{10}(2\cdot 3)^{\frac{1}{3}}$

$=\frac{1}{3}(\log_{10}2+\log_{10}3)=\frac{1}{3}(a+b)$

(2)　$\log_{10}15$

（解）$\log_{10}15=\log_{10}3\cdot 5=\log_{10}3+\log_{10}5$

$=b+\log_{10}\frac{10}{2}=b+\log_{10}10-\log_{10}2=-a+b+1$