1　展開・因数分解の公式

① $(a+b)^2=$　　　　② $(a+b)(a-b)=$

$(a-b)^2=$

③ $(x+a)(x+b)=$　　　　④ $(ax+b)(cx+d)=$

⑤ $(a+b+c)^2=$　　　　⑥ $(a+b)^3=$

$(a-b)^3=$

⑦ $(a+b)(a^2-ab+b^2)=$

$(a-b)(a^2+ab+b^2)=$

2　二項定理

〈数学Ａの復習〉

１ 順列　${}_5\mathrm{P}_3=5\cdot4\cdot3=60$　　２ 組合せ　${}_5\mathrm{C}_3=\dfrac{5\cdot4\cdot3}{3\cdot2\cdot1}=10$　${}_5\mathrm{C}_2=\dfrac{5\cdot4}{2\cdot1}=10$　$\therefore\ {}_5\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_2$

３ 同じものを含む順列

○ $aaabb$ の５文字を使って作られる順列の総数は

${}_5\mathrm{C}_3={}_5\mathrm{C}_2=10$

○ $aaabbcc$ の７文字を使って作られる順列の総数は

${}_7\mathrm{C}_2\times{}_5\mathrm{C}_2=\dfrac{7\cdot6}{2\cdot1}\times\dfrac{5\cdot4}{2\cdot1}=210$　または　$\dfrac{7!}{3!\cdot2!\cdot2!}=\dfrac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1\cdot2\cdot1\cdot2\cdot1}=210$

問　次の展開式において、指定された項を求めよ。

(1) $(a+b)^5$ の展開式における a^3b^2 の項

(2) $(2x-1)^6$ の展開式における x^3 の項

(3) $(a+b+c)^7$ の展開式における $a^3b^2c^2$ の項

3　整式の割り算

AをBで割ったときの商をQ、Rを余りとすると　$A=BQ+R$　と表せる。

問　整式 x^3+2x^2+2x-6 を整式Bで割ると、商が $x-1$、余りが $3x-4$ であるとき、Bを求めよ。

4　分数式の計算

約分　$\dfrac{A}{B}=\dfrac{AC}{BC}\ (C\neq 0)$、$\dfrac{A\cancel{D}}{B\cancel{D}}=\dfrac{A}{B}$　　乗法・除法　$\dfrac{A}{B}\times\dfrac{C}{D}=\dfrac{AC}{BD}$、$\dfrac{A}{B}\div\dfrac{C}{D}=\dfrac{A}{B}\times\dfrac{D}{C}=\dfrac{AD}{BC}$

加法・減法　$\dfrac{A}{C}+\dfrac{B}{C}=\dfrac{A+B}{C}$、$\dfrac{A}{C}-\dfrac{B}{C}=\dfrac{A-B}{C}$

問　次の式を計算せよ。

(1)　$\dfrac{x^2+x}{x+2}\div\dfrac{x+1}{x^2-4}$

(2)　$\dfrac{2}{x+1}+\dfrac{1}{x-3}$

(3)　$\dfrac{2}{x^2-1}-\dfrac{1}{x^2+x}$

5　恒等式

1　$ax^2+bx+c=a'x^2+b'x+c'$ が x についての恒等式である　$\Leftrightarrow$　$a=a'$、$b=b'$、$c=c'$

2　$ax^2+bx+c=0$ が x についての恒等式である　$\Leftrightarrow$　$a=b=c=0$

問　次の等式が x についての恒等式となるように、定数 a、b、c の値を求めよ。

(1)　$3x^2+8x+1=(x+2)(ax+b)+c$

(2)　$\dfrac{x+3}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{x+2}$

6　等式の証明

【$A=B$ の証明の方法】

1　AかBの一方を変形して、他方の式になることを示す。

2　AとBの両方を変形して、同じ式になることを示す。

3　$A-B$を計算して、0 になることを示す。

問　次の等式を証明せよ。

(1)　$(a^2+1)(b^2+1)=(ab+1)^2+(a-b)^2$

(2)　$a+b=c$ のとき、$b^2+c^2=a^2+2bc$

(3)　$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$　のとき、　$\dfrac{a+c}{b+d}=\dfrac{a-c}{b-d}$

$\boxed{7}$　不等式の証明

不等式　$A>B$ を証明するには,　　$A-B>0$ であることを示せばよい。

【実数の大小関係】

1　$a>b,\ b>c\ \Rightarrow\ a>c$

2　$a>b\ \Rightarrow\ a+c>b+c,\ a-c>b-c$

3　$a>b,\ c>0\ \Rightarrow\ ac>bc,\ \dfrac{a}{c}>\dfrac{b}{c}$

4　$a>b,\ c<0\ \Rightarrow\ ac<bc,\ \dfrac{a}{c}<\dfrac{b}{c}$

【実数の平方の性質】

1　実数 a について　$a^2\geqq 0$　（等号が成り立つのは，$a=0$　のときである。）

2　実数 $a,\ b$ について　$a^2+b^2\geqq 0$　（等号が成り立つのは，$a=b=0$　のときである。）

3　$a>0,\ b>0$ のとき　$a^2>b^2\ \Leftrightarrow\ a>b$,　$a^2\geqq b^2\ \Leftrightarrow\ a\geqq b$

【絶対値】

定義は　$|a|=\begin{cases} a & (a\geqq 0 \text{ のとき}) \\ -a & (a<0 \text{ のとき}) \end{cases}$

性質　$|a|\geqq 0,\quad |a|\geqq a,\quad |a|\geqq -a,\quad |a|^2=a^2,\quad |ab|=|a||b|$

【相加平均と相乗平均の大小関係】

$a>0,\ b>0$ のとき　$\dfrac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}$　（等号が成り立つのは，$a=b$ のときである）

＊不等式の証明では、$a+b\geqq 2\sqrt{ab}$　を利用することが多い。

問　次の不等式を証明せよ。

(1)　$x>1,\ y>1$ のとき，　不等式　$xy+1>x+y$　を証明せよ。

(2)　不等式　$a^2+5b^2\geqq 4ab$　を証明せよ。また、等号が成り立つときを調べよ。

(3)　$a>0,\ b>0$ のとき，不等式　$\sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$　を証明せよ。

(4)　不等式　$|a|+|b| \geqq |a+b|$　を証明せよ。また、等号が成り立つときを調べよ。

(5)　$a>0$ のとき、不等式　$a+\dfrac{1}{a} \geqq 2$　を証明せよ。また、等号が成り立つときを調べよ。

補充１　$a+b+c=0$　のとき、等式　$a^3+b^3+c^3=3abc$　を証明せよ。

補充２　$a>0,\ b>0$　のとき、不等式　$(a+b)\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right) \geqq 4$　を証明せよ。