1　複素数とその計算

2 次方程式 $x^2=3$ は、実数の範囲で解 $x=\pm\sqrt{3}$ をもつ。しかし、実数の 2 乗は負にならないので、2 次方程式 $x^2=-3$ は、実数の範囲では解をもたない。そこで、2 次方程式 $x^2=k$ が実数 k の符号に関係なく常に解をもつように、実数を含む新しい数を考える。

【定義】

1　2 乗して -1 になる新しい数を 1 つ考え、これを文字 i で表す。　$i^2=-1$

2　i と 2 つの実数 a, b を用いて、$a+bi$ の形で表される数を考える。これを複素数という。

$$\text{複素数}\quad a+bi=\begin{cases} b\neq 0 \text{ のとき　虚数 } a+bi & (\text{特に } a=0 \text{ のとき、純虚数 } bi) \\ b=0 \text{ のとき　実数 } a \end{cases}$$

＊　aを実部、bを虚部、iを虚数単位という。

【複素数の相等】

a, b, c, d　は実数とする。

$a+bi=c+di \quad\Leftrightarrow\quad a=c$　かつ　$b=d$、とくに　$a+bi=0 \quad\Leftrightarrow\quad a=b=0$

【共役な複素数】

2 つの複素数 $a+bi$, $a-bi$ を、互いに共役な複素数という。(実数aと共役な複素数はaである)

【負の数の平方根】

$a>0$ とする。$-a$ の平方根は $\pm\sqrt{-a}=\pm\sqrt{a}\,i$ である。($x^2=-3$ の解は、$x=\pm\sqrt{3}\,i$)

問１　次のような実数 x, y を求めよ。

(1)　$(x+y)+(x+2)i=0$

（解）$x+y$, $x+2y$　は実数であるから　$x+y=0$, $x+2=0$

これを解いて、$x=-2$, $y=2$

(2)　$(x-2y)+(2x-3y)i=4+7i$

（解）$x-2y$, $2x-3y$　は実数であるから　$x-2y=4$, $2x-3y=7$

これを解いて、$x=2$, $y=-1$

問２　次の計算をせよ。

(1)　$(1+2i)(4+i)=4+i+8i+2i^2=4+i+8i+2(-1)=(4-2)+(1+8)i=2+9i$

(2)　$\dfrac{2+9i}{1+2i}=\dfrac{(2+9i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}=\dfrac{2-4i+9i-18i^2}{1^2+(2i)^2}=\dfrac{20+5i}{5}=4+i$

(3)　$\sqrt{-2}\sqrt{-3}=\sqrt{2}\,i\times\sqrt{3}\,i=\sqrt{6}\,i^2=-\sqrt{6}$

(4)　$\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-4}}=\dfrac{\sqrt{3}\,i}{\sqrt{4}\,i}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(5)　$\left(1+\sqrt{-3}\right)^2=(1+3i)^2=1^2+2\cdot1\cdot3i+3^2i^2=1+6i+9(-1)=-8+6i$

2　２次方程式の解

【2 次方程式の解の公式】

2 次方程式　$ax^2+bx+c=0$　の解は　$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

【2 次方程式の解の種類の判別】

2 次方程式　$ax^2+bx+c=0$　の判別式をDとすると、$D=b^2-4ac$ (解の公式の$\sqrt{\ }$の中)。

$D>0 \quad\Leftrightarrow$　異なる 2 つの実数解

$D=0 \quad\Leftrightarrow$　重解（1 つの実数解）

$D<0 \quad\Leftrightarrow$　異なる 2 つの虚数解

＊2 次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ では、$D=(2b')^2-4ac=4\left(b'^2-ac\right)$ であるから、

Dのかわりに $\dfrac{D}{4}=b'^2-ac$ を用いてもよい。

問１　次の 2 次方程式を解け。

(1)　$x^2+18=0$

(解) $x^2=-18$

$x=\pm\sqrt{-18}=\pm\sqrt{18}\,i=\pm 3\sqrt{2}\,i$

(2)　$3x^2+7x+5=0$

(解) $x=\dfrac{-7\pm\sqrt{7^2-4\cdot 3\cdot 5}}{2\cdot 3}=\dfrac{-7\pm\sqrt{11}i}{6}$

問２　次の 2 次方程式の解の種類を判別せよ。

(1)　$3x^2+5x+1=0$

(解) 判別式をDとすると

$D=5^2-4\cdot 3\cdot 1=13>0$

よって、異なる 2 つの実数解

(2)　$9x^2+6x+1=0$

(解) 判別式をDとすると

$\dfrac{D}{4}=3^2-9\cdot 1=0$

よって、重解

(3)　$2x^2-x+3=0$

(解) 判別式をDとすると

$D=(-1)^2-4\cdot 2\cdot 3=-23<0$

よって、異なる 2 つの虚数

問３　2 次方程式 $x^2+2mx+m+6=0$ が実数解をもつとき、定数 m の値の範囲を求めよ。

（解）

この 2 次方程式の判別式をDとすると

$\dfrac{D}{4}=m^2-1\cdot(m+6)=m^2-m-6$

2 次方程式が実数解をもつのは　$D\geqq 0$　のときである。

よって　$m^2-m-6\geqq 0$

$(m+2)(m-3)\geqq 0$

これを解いて　$m\leqq -2,\ 3\leqq m$

3　解と係数の関係

【解と係数の関係】

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の 2 つの解 $\alpha,\ \beta$ とすると

$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a},\ \alpha\beta=\dfrac{c}{a}$

【2 次式の因数分解】

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ が 2 つの解 $\alpha,\ \beta$ をもつとき

$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$

【2 次方程式の決定】

2 数 $\alpha,\ \beta$ を解とする 2 次方程式の 1 つは

$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$　　$\Leftarrow$ $(x-\alpha)(x-\beta)=0$ を展開して

【式の基本変形】

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta,$　　$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$　または　$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$

問１　2 次方程式 $x^2-4x+5=0$ の 2 つの解を $\alpha,\ \beta$ とするとき、次の式の値を求めよ。

(1)　$\alpha^2+\beta^2$

(解) 解と係数の関係から $\alpha+\beta=4,\ \alpha\beta=5$

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=4^2-2\cdot 5=6$

(2)　$\alpha^3+\beta^3$

(解) 解と係数の関係から $\alpha+\beta=4,\ \alpha\beta=5$

$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$

$=4^3-3\cdot 5\cdot 4=4$

問２　2 次方程式 $x^2+3x+m=0$ の 1 つの解が他の解の 2 倍であるとき、定数mの値と解を求めよ。

（解）

2 つの解は $\alpha,\ 2\alpha$ と表すことができるので、解と係数の関係から

$\alpha+2\alpha=-3,\ \alpha\cdot 2\alpha=m$　よって　$3\alpha=-3,\ 2\alpha^2=m$

これを解いて　$\alpha=-1,\ m=2$　よって　$m=2$，2 つの解は $-1,\ -2$

問３　2 次式 $2x^2-2x-1$ を複素数の範囲で因数分解せよ。
（解）

2 次方程式 $2x^2-2x-1=0$ の解は $x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}$

よって　$2x^2-2x-1=2\left(x-\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\left(x-\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$

問４　2 数 $3+i$，$3-i$ を解とする 2 次方程式を作れ。
（解）

解の和は　$(3+i)+(3-i)=6$

解の積は　$(3+i)(3-i)=3^2-i^2=10$

よって　この 2 数を解とする 2 次方程式の 1 つは　$x^2-6x+10=0$

4　剰余の定理と因数定理

整式 $P(x)$ を 1 次式 $x-k$ で割ったときの商を $Q(x)$、余りを R とすると

$P(x)=(x-k)\,Q(x)+R$　　R は定数

【剰余の定理】　整式 $P(x)$ を 1 次式 $x-k$ で割ったときの余りは　$P(k)$ に等しい

【因数定理】　整式 $P(x)$ が 1 次式 $x-k$ を因数にもつ　$\Leftrightarrow$　$P(k)=0$

$(x-k)\,Q(x)$ の形に因数分解できる

〈参考〉

整式 $P(x)$ を 1 次式 $ax+b\ (a\neq 0)$ で割ったときの商を $Q(x)$、余りを R とすると

$P(x)=(ax+b)\,Q(x)+R=a\left(x+\dfrac{b}{a}\right)Q(x)+R$　R は定数　となるので

整式 $P(x)$ を 1 次式 $ax+b$ で割ったときの余りは　$P\left(-\dfrac{b}{a}\right)$ に等しい

問１　整式 $P(x)=x^3+ax^2+3x-2a$ を $x-2$ で割った余りが 12 であるとき、定数 a の値を求めよ。
（解）

剰余の定理より　$P(2)=8+4a+6-2a=12$

整理すると　$2a=-2$　よって　$a=-1$

問２　整式 $P(x)$ を $x-1$、$x+2$ で割った余りがそれぞれ 5、-1 であるとき、$P(x)$ を $(x-1)(x+2)$ で割った余りを求めよ。
（解）

$P(x)$ を $(x-1)(x+2)$ で割った余りを $ax+b$、商を $Q(x)$ とすると

$P(x)=(x-1)(x+2)\,Q(x)+ax+b$　となる

条件から　$P(1)=5$、$P(-2)=-1$

よって　$a+b=5$、$-2a+b=-1$　　これを解いて　$a=2$、$b=3$

したがって、求める余りは　$2x+3$

問３　x^3-4x^2+x+6 を因数分解せよ。
（解）

$P(x)=x^3-4x^2+x+6$ とすると　$P(2)=2^3-4\cdot 2^2+2+6=0$

よって、$P(x)$ は $x-2$ を因数にもつ

$P(x)$ を $x-2$ で割ったときの商は x^2-2x-3 となるので　$\Leftarrow$　割算は組立除法が簡単

$x^3-4x+x+6=(x-2)(x^2-2x-3)=(x-2)(x-3)(x+1)$

5　高次方程式

【高次方程式（3 次以上の方程式）$P(x)=0$ の解き方】

手順１　因数分解の公式を利用する

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2) \qquad a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3 \qquad a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$$

手順２　公式が利用できないときは、$P(k)=0$ を満たすkをみつけて因数分解する

因数定理　$P(k)=0 \quad \Leftrightarrow \quad P(x)=(x-k)\,Q(x)$

問　次の方程式を解け。

(1) $x^4-x^2-2=0$

（解）

左辺を因数分解して $(x^2-2)(x^2+1)=0$　　よって　$x^2-2=0$　または　$x^2+1=0$

したがって　$x=\pm\sqrt{2}$、$\pm i$

(2) $x^3-4x^2+8=0$

（解）

$P(x)=x^3-4x^2+8$ とすると　$P(2)=2^3-4\cdot 2^2+8=0$

よって　$P(x)$は $x-2$ を因数にもつので、$P(x)$を $x-2$ で割ると商は x^2-2x-4 となるので

$P(x)=(x-2)(x^2-2x-4)$　　$P(x)=0$ から　$x-2=0$　または　$x^2-2x-4=0$

したがって　$x=2$、$1\pm\sqrt{5}$

研究１　組立除法

組立除法を使って，次の第 1 式を第 2 式で割ったときの，商と余りを求めよ。

(1)　$3x^3+2x^2-6x-1$，$x-2$

（項）	x^3	x^2	x	定数	
2	3	2	−6	−1	
×		6	16	20	(+)
	3	8	10	19	
（商）	x^2	x	定数	（余り）	

答　商 $3x^2+8x+10$，余り 19

(2)　x^4-x^2+3x-6，$x+2$

（項）	x^4	x^3	x^2	x	定数	
−2	1	0	−1	3	−6	
		−2	4	−6	6	(+)
	1	−2	3	−3	0	
（商）	x^3	x^2	x	定数	（余り）	

答　商 x^3-2x^2+3x-3，余り 0

問　組立除法を使って，次の第 1 式を第 2 式で割ったときの，商と余りを求めよ。

(1)　x^3-2x^2+3x-9，$x-3$

（解）

3	1	−2	3	−9
		3	3	18
	1	1	6	9

商 x^2+x+6，余り 9

(2)　$x^4+x^3-3x^2+x+2$，$x+3$

（解）

−3	1	1	−3	1	2
		−3	6	−9	24
	1	−2	3	−8	26

商 x^3-2x^2+3x-8，余り 26

研究２　２次方程式の解の実数解の符号

1　$f(x)=ax^2+bx+c\quad(a>0)$ とする。　$f(x)=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$ と変形できるので、

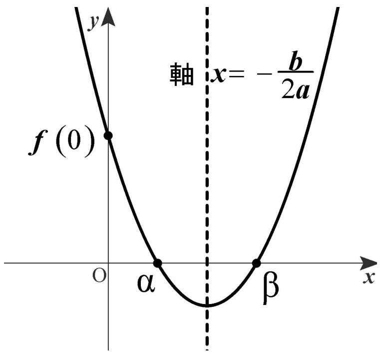
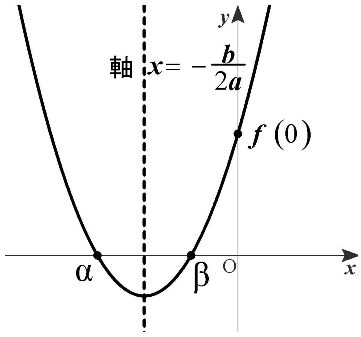
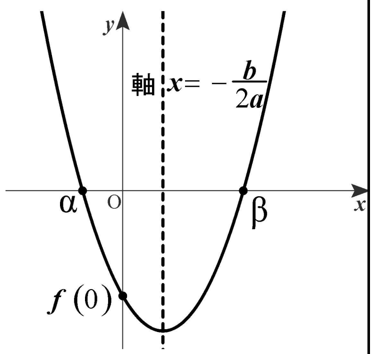
放物線 $y=f(x)$ の軸の方程式は $x=-\dfrac{b}{2a}$，y切片は $f(0)$である。

2　2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式を D，2 つの解を α，β とする。

$D=b^2-4ac$である。解と係数の関係から　$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$，$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$ である。

3　α，β は放物線 $y=f(x)$とx軸との共有点のx座標である。

このとき，2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解の符号について，次のことが成り立つ。

	符号	異なる 2 つの正の解	異なる 2 つの負の解	異符号の解
	グラフ			
解法1	D	$D>0$	$D>0$	
	$\alpha+\beta$	$\alpha+\beta>0$	$\alpha+\beta<0$	
	$\alpha\beta$	$\alpha\beta>0$	$\alpha\beta>0$	$\alpha\beta<0$
解法2	D	$D>0$	$D>0$	
	軸	$-\dfrac{b}{2a}>0$	$-\dfrac{b}{2a}<0$	
	$f(0)$	$f(0)>0$	$f(0)>0$	$f(0)<0$

問　2 次方程式 $x^2+2mx+m+2=0$ が異なる 2 つの正の解をもつとき、定数mの値の範囲を求めよ。

（解１）

この 2 次方程式の判別式を D,
2 つの解を α，β とする。
方程式が条件を満たすのは,
次の 3 つが成り立つとき。

$D>0$ …①　$\alpha+\beta>0$…②　$\alpha\beta>0$ …③

ここで　$\dfrac{D}{4}=m^2-1\cdot(m+2)=m^2-m-2$

①より　$m^2-m-2>0$

$(m+1)(m-2)>0$

よって　$m<-1,\ 2<m$　…④

解と係数の関係により　$\alpha+\beta=-2m,\ \alpha\beta=m+2$

②より　$-2m>0$　ゆえに　$m<0$…⑤

③より　$m+2>0$　ゆえに　$m>-2$…⑥

④，⑤，⑥の共通範囲を求めて

$-2<m<-1$

（解２）

$f(x)=x^2+2mx+m+2$ とすると、
放物線 $y=f(x)$ の軸の方程式は $x=-m$で、
$f(0)=m+2$ である。
方程式 $f(x)=0$ の判別式をDとすると

$\dfrac{D}{4}=m^2-(m+2)=m^2-m-2$

$=(m+1)(m-2)$

方程式が条件を満たすのは。次の 3 つが成り立つときである。

$D>0$…①　$-m>0$…②　$f(0)>0$…③

①を解いて　$m<-1,\ 2<m$…④

、②を解いて　$m<0$…⑤、

③を解いて　$m>-2$…⑥

④，⑤，⑥の共通範囲を求めて

$-2<m<-1$