数学Ⅱ　第４章　三角関数（１）　　　　　年　　組　　番・氏名

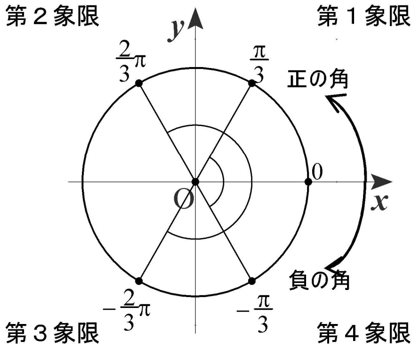
1　弧度法

【角の考え方】

三角関数では、x軸の正の部分からの回転の角を考える。

時計の針の回転と逆向きを、　正の角　という。

時計の針の回転と同じ向きを、負の角　という。



【扇形の弧の長さと面積】

半径 r，中心角 θ(ﾗｼﾞｱﾝ) の扇形の弧の長さ l，面積 Sは

$l = r\theta$，$S = \frac{1}{2}r^2\theta$　または　$S = \frac{1}{2}lr$

問１　度数法と弧度法の対応表を完成させよ。

度数法	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
弧度法	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{5}{6}\pi$	π	$\frac{7}{6}\pi$	$\frac{4}{3}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$	$\frac{5}{3}\pi$	$\frac{11}{6}\pi$	2π

度数法	45°	135°	225°	315°
弧度法	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{7}{4}\pi$

（参考）$l = \text{円周の長さ} \times \frac{\text{中心角}}{2\pi} = 2\pi r \times \frac{\theta}{2\pi} = r\theta$

$S = \text{円の面積} \times \frac{\text{中心角}}{2\pi} = \pi r^2 \times \frac{\theta}{2\pi} = \frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}r\theta \cdot r = \frac{1}{2}lr$

問２　半径 10，中心角 $\frac{\pi}{6}$ の扇形の弧の長さ l と面積 Sを求めよ。

（解）　$l = 10 \times \frac{\pi}{6} = \frac{5}{3}\pi$　　$S = \frac{1}{2} \times 10^2 \times \frac{\pi}{6} = \frac{25}{3}\pi$

2　三角関数

【三角関数の定義】

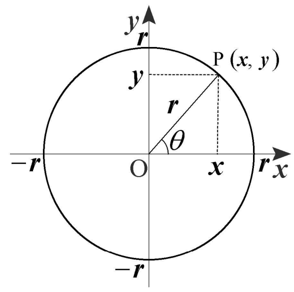
正弦：$\sin\theta = \frac{y}{r}$　　余弦：$\cos\theta = \frac{x}{r}$　　正接：$\tan\theta = \frac{y}{x}$

【三角関数の相互関係】

1　$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

2　$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

3　$1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$



問１　次の三角関数の値の表を完成させよ。

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$		$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

問２　次の値を求めよ。

$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$　　$\cos\frac{23}{6}\pi = \frac{\sqrt{3}}{2}$　　$\tan\left(-\frac{9}{4}\pi\right) = -1$

問３　次の問いに答えよ。

(1) θ が第 3 象限の角で，$\cos\theta = -\frac{3}{5}$ のとき，
$\sin\theta$，$\tan\theta$ の値を求めよ。

（解）

$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ より $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

$\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta = 1 - \left(-\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{16}{25}$

θ が第 3 象限の角であるから，$\sin\theta < 0$ である

よって，$\sin\theta = -\frac{4}{5}$

また、$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \left(-\frac{4}{5}\right) \div \left(-\frac{3}{5}\right)$

$= \left(-\frac{4}{5}\right) \times \left(-\frac{5}{3}\right) = \frac{4}{3}$

(2) θ が第 4 象限の角で，$\tan\theta = -2$ のとき，
$\sin\theta$，$\cos\theta$ の値を求めよ。

（解）

$1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$ より，

$\cos^2\theta = \frac{1}{1+\tan^2\theta} = \frac{1}{1+(-2)^2} = \frac{1}{5}$

θ が第 4 象限の角であるから，$\cos\theta > 0$ である

よって，$\cos\theta = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$

また、$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ より

$\sin\theta = \tan\theta \times \cos\theta = (-2) \times \frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}$

問４　$\sin\theta + \cos\theta = \frac{1}{2}$ のとき，
$\sin\theta\cos\theta$ の値を求めよ。

（解）

$\sin\theta + \cos\theta = \frac{1}{2}$ の両辺を２乗すると

$\sin^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta = \frac{1}{4}$

よって　$1 + 2\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{4}$

$2\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$

したがって　$\sin\theta\cos\theta = -\frac{3}{8}$

問５　等式　$\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$ を証明せよ。

（証明）

左辺 $= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$= \frac{\sin^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} + \frac{\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} = \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

$= \frac{1}{\sin\theta\cos\theta} =$ 右辺

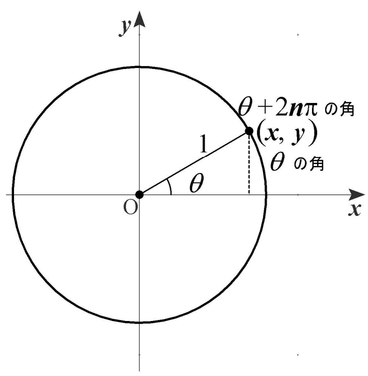
よって　$\tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} = \frac{1}{\sin\theta\cos\theta}$

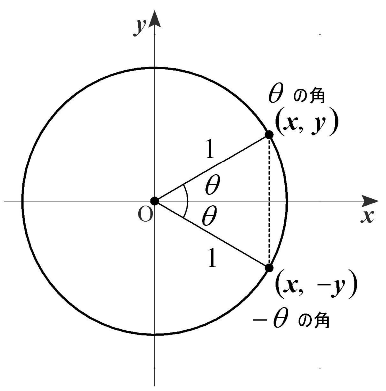
3　三角関数の性質

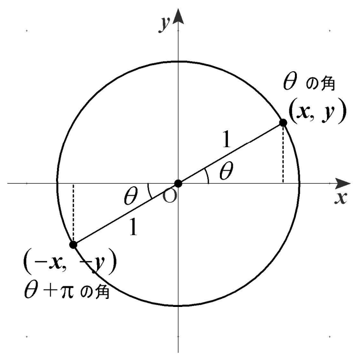
1　$\sin(\theta + 2n\pi) = \sin\theta$
$\cos(\theta + 2n\pi) = \cos\theta$
$\tan(\theta + 2n\pi) = \tan\theta$
nは整数

2　$\sin(-\theta) = -\sin\theta$
$\cos(-\theta) = \cos\theta$
$\tan(-\theta) = -\tan\theta$

3　$\sin(\theta + \pi) = -\sin\theta$
$\cos(\theta + \pi) = -\cos\theta$
$\tan(\theta + \pi) = \tan\theta$







4　$\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)=\cos\theta$

$\cos\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\sin\theta$

$\tan\left(\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{1}{\tan\theta}$

5　$\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$

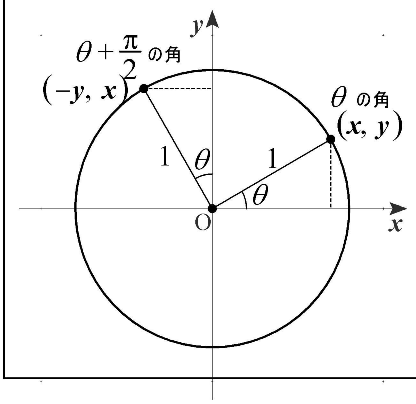
$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$

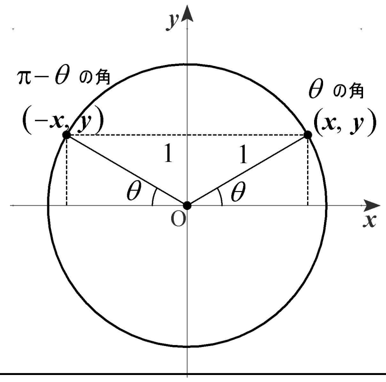
$\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$

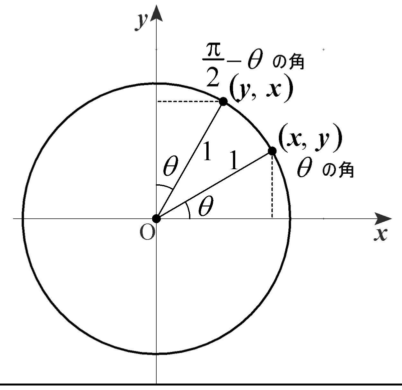
6　$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta$

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\sin\theta$

$\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\dfrac{1}{\tan\theta}$



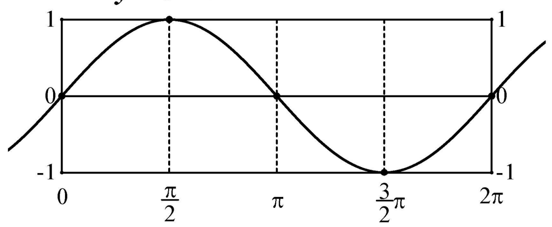




4　三角関数のグラフ

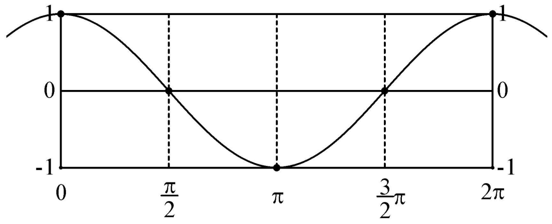
【三角関数のグラフの基本形】

$y=\sin\theta$ のグラフの基本形



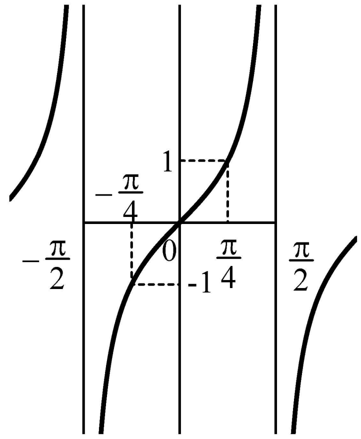
周期は 2π

$y=\cos\theta$ のグラフの基本形



周期は 2π

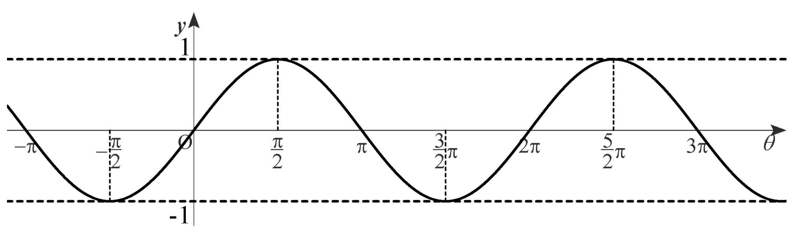
$y=\tan\theta$ のグラフの基本形



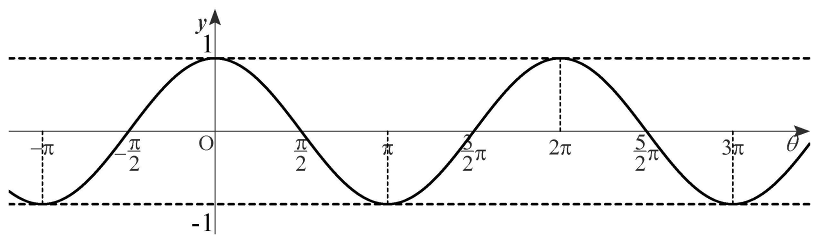
周期はπ

問　次の三角関数のグラフをかけ。

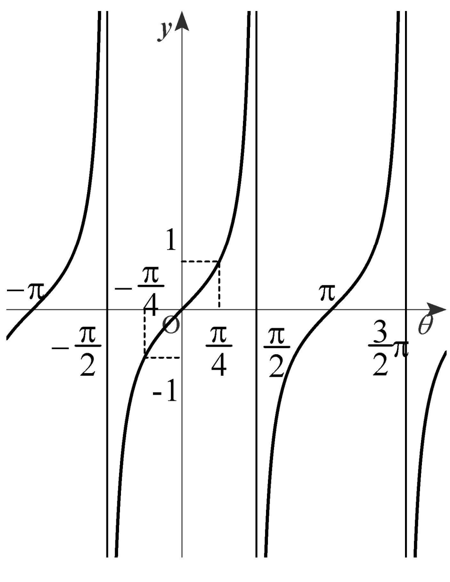
(1)　$y=\sin\theta$



(2)　$y=\cos\theta$



(3)　$y=\tan\theta$



$\boxed{5}$ いろいろな三角関数のグラフ

【 $y=\sin(\theta-p)$ 】

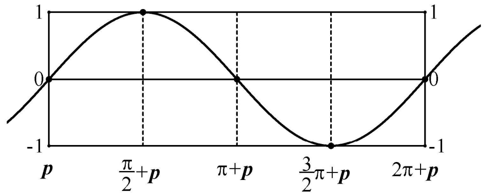
$\theta-p=0$ とすると、$\theta=p$

ゆえに、このグラフは $y=\sin\theta$ のグラフを

θ軸方向に p だけ平行移動したもの。

周期は 2πである。

$y=\sin(\theta-p)$ のグラフの基本形



【 $y=m\sin\theta$ 】

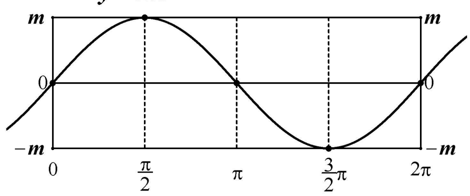
このグラフは $y=\sin\theta$ のグラフを

y軸方向へ m 倍に

拡大または縮小したもの。

周期は 2πである。

$y=m\sin\theta$ のグラフの基本形



【 $y=\sin k\theta$ 】

$k\theta=2\pi$ とすると、$\theta=2\pi\cdot\dfrac{1}{k}$

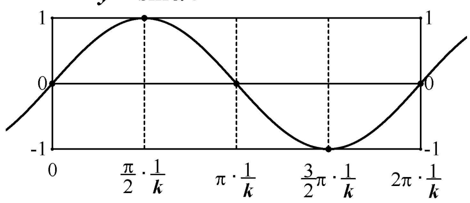
ゆえに、このグラフは $y=\sin\theta$ のグラフを

θ軸方向へ $\dfrac{1}{k}$ 倍に

拡大または縮小したもの。

周期は $\dfrac{2\pi}{k}$ である。

$y=\sin k\theta$ のグラフの基本形

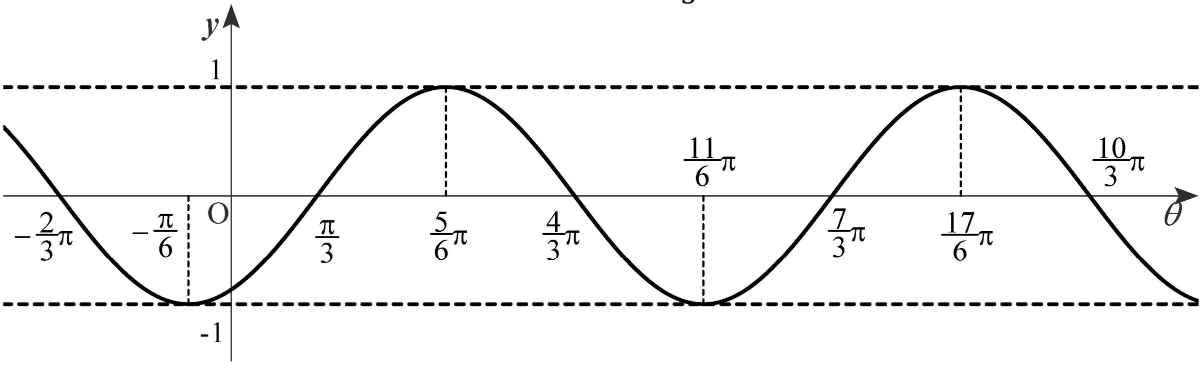


問　次の関数のグラフをかけ。

(1)　$y=\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)$

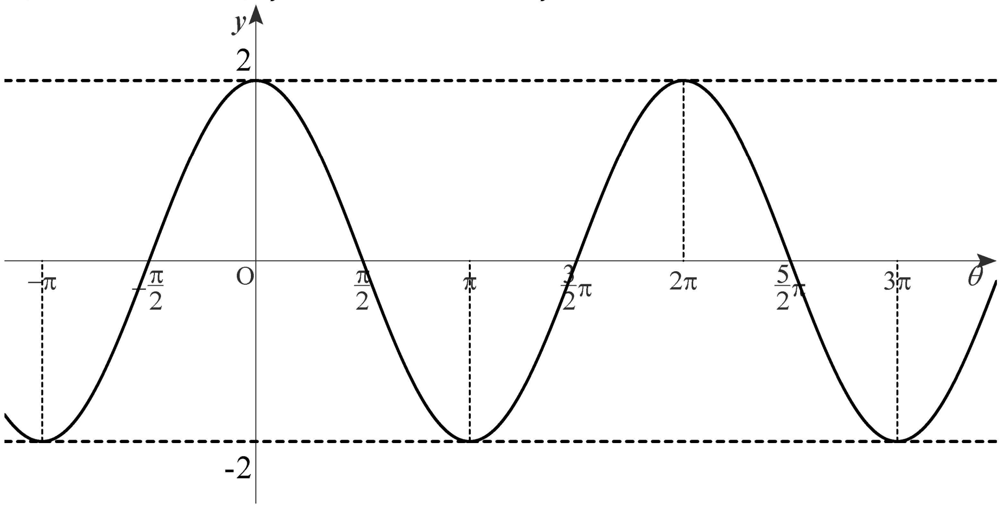
(解)　$\theta-\dfrac{\pi}{3}=0$ とすると，$\theta=\dfrac{\pi}{3}$

このグラフは，$y=\sin\theta$ のグラフを θ 軸方向へ $\dfrac{\pi}{3}$ だけ平行移動したものである。



(2)　$y=2\cos\theta$

（解）このグラフは，$y=\cos\theta$ のグラフをy軸方向へ 2 倍に拡大したものである。

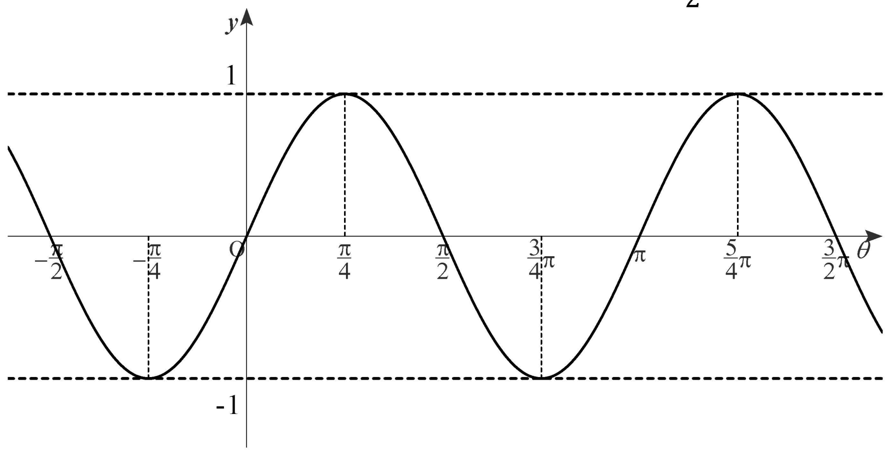


(3)　$y=\sin 2\theta$

(解)　$2\theta=2\pi$ とすると，$\theta=2\pi\times\frac{1}{2}=\pi$

ゆえに、この関数の周期は，π である。

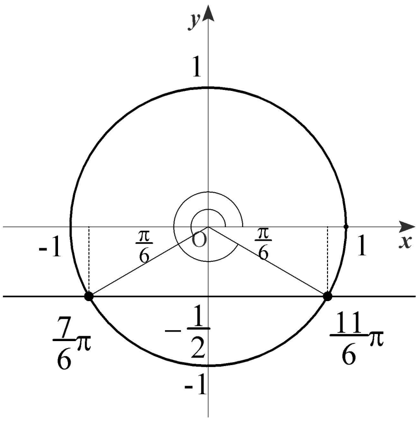
このグラフは，$y=\sin\theta$ のグラフを θ 軸方向へ$\frac{1}{2}$倍に縮小したものである。



$\boxed{6}$　三角関数を含む方程式・不等式

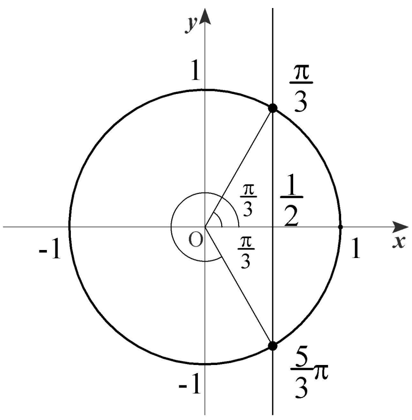
問１　$0\leqq\theta<2\pi$のとき，次の方程式を解け。

(1)　$\sin\theta=-\frac{1}{2}$



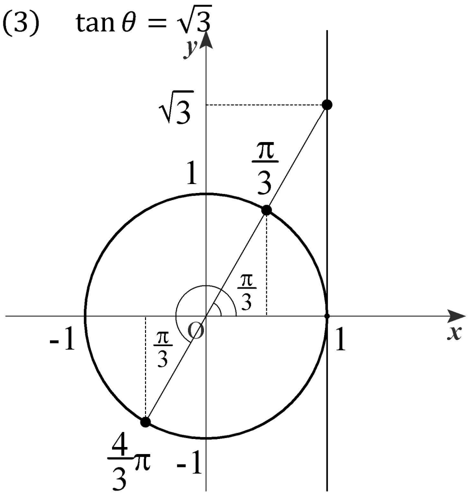
$\theta=\frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$

(2)　$\cos\theta=\frac{1}{2}$



$\theta=\frac{\pi}{3},\ \frac{5}{3}\pi$

(3)　$\tan\theta=\sqrt{3}$



$\theta=\frac{\pi}{3},\ \frac{4}{3}\pi$

問２　$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，方程式 $5\sin\theta-2\cos^2\theta+4=0$ を解け。

（解）

方程式を変形すると　$5\sin\theta-2(1-\sin^2\theta)+4=0$

$2\sin^2\theta+5\sin\theta+2=0$

因数分解すると　$(2\sin\theta+1)(\sin\theta+2)=0$

解いて　$\sin\theta=-\frac{1}{2}$　または　$\sin\theta=-2$

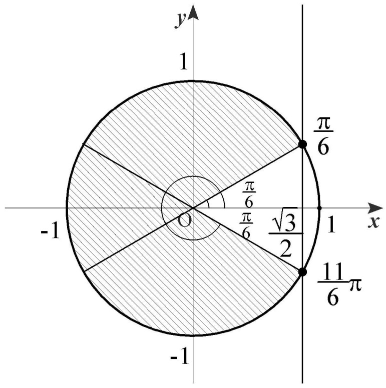
$0\leqq\theta<2\pi$のとき，$-1\leqq\sin\theta\leqq1$ であるから

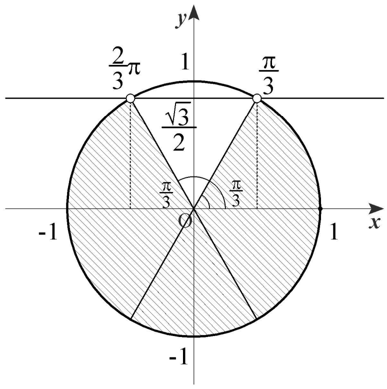
$\sin\theta=-\frac{1}{2}$

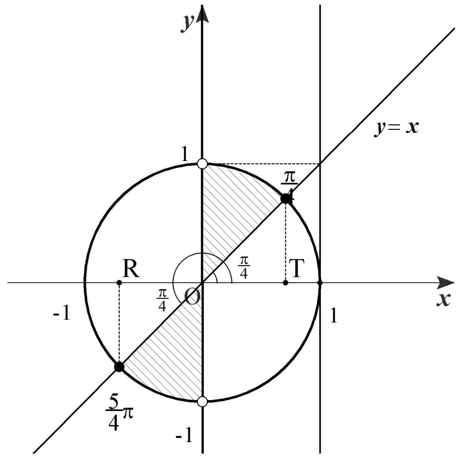
$0\leqq\theta<2\pi$ のの範囲で解くと　$\theta=\frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$

問　$0 \leqq \theta < 2\pi$のとき，次の不等式を解け。

(1)　$\cos\theta \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(2)　$\sin\theta < \dfrac{\sqrt{3}}{2}$　　(3)　$\tan\theta \geqq 1$







$\dfrac{\pi}{6} \leqq \theta \leqq \dfrac{11}{6}\pi$　　$0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{2}{3}\pi < \theta < 2\pi$　　$\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{5}{4}\pi \leqq \theta < \dfrac{3}{2}\pi$

7　加法定理

1　$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

　$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

2　$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

　$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

3　$\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

　$\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

問　加法定理を使って，次の値を求めよ。

(1)　$\sin 75^\circ$

$$= \sin(45^\circ + 30^\circ)$$
$$= \sin45^\circ\cos30^\circ + \cos45^\circ\sin30^\circ$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$
$$= \frac{(\sqrt{3}+1) \times \sqrt{2}}{2\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

(2)　$\cos 15^\circ$

$$= \cos(45^\circ - 30^\circ)$$
$$= \cos45^\circ\cos30^\circ + \sin45^\circ\sin30^\circ$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$$
$$= \frac{(\sqrt{3}+1) \times \sqrt{2}}{2\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

(3)　$\tan 75^\circ$

$$= \tan(45^\circ + 30^\circ)$$
$$= \frac{\tan45^\circ + \tan30^\circ}{1 - \tan45^\circ\tan30^\circ}$$
$$= \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$$
$$= \frac{(\sqrt{3}+1)^2}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$$
$$= \frac{3 + 2\sqrt{3} + 1}{(\sqrt{3})^2 - 1}$$
$$= \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3}$$

問　2 直線 $y = -2x$，$y = 3x$ のなす角 θ を求めよ。
ただし，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ とする。

（解）

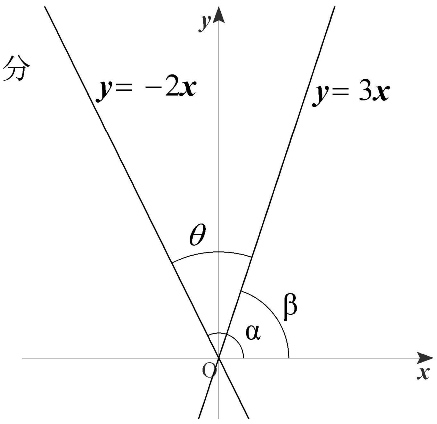
2 直線 $y = -2x$，$y = 3x$ とx軸の正の部分とのなす角をそれぞれ α，β とすると

$\theta = \alpha - \beta$となる

$\tan\alpha = -2$，$\tan\beta = 3$ であるから

$$\tan\theta = \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$$
$$= \frac{-2-3}{1 + (-2) \cdot 3} = 1$$

$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$であるから　$\theta = \dfrac{\pi}{4}$



$\boxed{8}$　２倍角の公式、半角の公式、三角関数の合成

【２倍角の公式】

1　$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

2　$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

3　$\tan 2\alpha = \dfrac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$

【半角の公式】

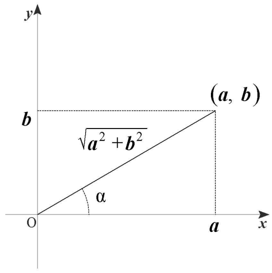
1　$\sin^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{2}$

2　$\cos^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1+\cos\alpha}{2}$

3　$\tan^2\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$

【三角関数の合成】

$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\alpha)$



$\cos\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$\sin\alpha = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$

問１　$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ で，$\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$ のとき，次の値を求めよ。

(1)　cosα

（解）

$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$

$= 1 - \left(\dfrac{3}{5}\right)^2 = \dfrac{16}{25}$

$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\cos\alpha > 0$ より

$\cos\alpha = \dfrac{4}{5}$

(2)　sin2α

（解）

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$= 2 \times \dfrac{3}{5} \times \dfrac{4}{5} = \dfrac{24}{25}$

(3)　cos2α

（解）

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

$= 1 - 2\left(\dfrac{3}{5}\right)^2$

$= 1 - \dfrac{18}{25} = \dfrac{7}{25}$

問２　等式 $\dfrac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = \tan\alpha$ を証明せよ。

（証明）

左辺 $= \dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{1+(2\cos^2\alpha - 1)} = \dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha}$

$= \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha =$ 右辺

よって　$\dfrac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha} = \tan\alpha$

問３　半角の公式を使って $\sin\dfrac{\pi}{8}$ の値を求めよ。

（解）

$\sin^2\dfrac{\pi}{8} = \dfrac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2} = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$= \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2-\sqrt{2}}{2} = \dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$

$\sin\dfrac{\pi}{8} > 0$ より

$\sin\dfrac{\pi}{8} = \sqrt{\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{4}} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

問４　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，方程式 $\cos 2\theta + \cos\theta + 1 = 0$ を解け。

（解）

方程式を変形すると $(2\cos^2\theta - 1) + \cos\theta + 1 = 0$

$2\cos^2\theta + \cos\theta = 0$　因数分解して $\cos\theta(2\cos\theta + 1) = 0$

$\cos\theta = 0$　または　$\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ であるから

$\cos\theta = 0$ のとき　$\theta = \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi$

$\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$ のとき，$\theta = \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi$

ゆえに　$\theta = \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi$

問５　$\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta$ を $r\sin(\theta+\alpha)$ の形に表せ。ただし，$r>0$，$-\pi<\alpha<\pi$ とする。

（解）

$$\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}\,\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$$

問６　関数 $y=\sin x+\cos x$ の最大値，最小値を求めよ。

（解）

$y=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$　と変形できる。

$-1\leqq\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\leqq1$ であるから

$-\sqrt{2}\leqq\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\leqq\sqrt{2}$　ゆえに　$-\sqrt{2}\leqq y\leqq\sqrt{2}$

したがって　yの最大値は$\sqrt{2}$，最小値は$-\sqrt{2}$

問７　$0\leqq x<2\pi$ のとき，方程式 $\sqrt{3}\sin x-\cos x=1$ を解け。

（解）

左辺の三角関数を合成すると

$2\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=1$

よって　$\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\cdots\cdots$①

$0\leqq x<2\pi$ より $-\frac{\pi}{6}\leqq x-\frac{\pi}{6}<2\pi-\frac{\pi}{6}$

つまり $-\frac{\pi}{6}\leqq x-\frac{\pi}{6}<\frac{11}{6}\pi$ であるから

方程式①の解は $x-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$，$\frac{5}{6}\pi$　　したがって　$x=\frac{\pi}{3}$，π

$\boxed{\text{発展}}$　和と積の公式

【積から和に変形】

1　$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$

2　$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\}$

3　$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}$

4　$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)\}$

【和から積に変形】

5　$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$

6　$\sin A-\sin B=2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$

7　$\cos A+\cos B=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$

8　$\cos A-\cos B=-2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$

（１と５の証明）

加法定理より

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\cdots\cdots$①

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta\cdots\cdots$②

①＋②を計算して　$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta\cdots\cdots$③

両辺を２で割って　$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\}$　⇒公式１

ここで　$\alpha+\beta=A\cdots\cdots$④，$\alpha-\beta=B\cdots\cdots$⑤　とすると

④＋⑤を計算して　$2\alpha=A+B$から　$\alpha=\frac{A+B}{2}$，同様に④－⑤から　$\beta=\frac{A-B}{2}$

これらを③に代入すると　$\sin A+\sin B=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$　⇒公式５