数学Ⅱ　第２章　複素数と方程式（１）　　　　　　　　　年　　組　　番・氏名

# 1　複素数とその計算

2 次方程式 $x^2=3$ は、実数の範囲で解 $x=\pm\sqrt{3}$ をもつ。しかし、実数の 2 乗は負にならないので、2 次方程式 $x^2=-3$ は、実数の範囲では解をもたない。そこで、2 次方程式 $x^2=k$ が実数 $k$ の符号に関係なく常に解をもつように、実数を含む新しい数を考える。

【定義】

1　2 乗して $-1$ になる新しい数を 1 つ考え、これを文字 $i$ で表す。　$i^2=-1$

2　$i$ と 2 つの実数 $a,\ b$ を用いて、$a+bi$ の形で表される数を考える。これを複素数という。

$$\text{複素数}\quad a+bi=\begin{cases} b\neq 0\ \text{のとき　虚数}\ a+bi & \left(\text{特に}\ a=0\ \text{のとき、純虚数}\ bi\right) \\ b=0\ \text{のとき　実数}\ a \end{cases}$$

＊　$a$を実部、$b$を虚部、$i$を虚数単位という。

【複素数の相等】

$a,\ b,\ c,\ d$　は実数とする。

$a+bi=c+di \iff a=c$　かつ　$b=d$、とくに　$a+bi=0 \iff a=b=0$

【共役な複素数】

2 つの複素数 $a+bi,\ a-bi$ を、互いに共役な複素数という。(実数$a$と共役な複素数は$a$である)

【負の数の平方根】

$a>0$ とする。$-a$ の平方根は $\pm\sqrt{-a}=\pm\sqrt{a}\,i$ である。( $x^2=-3$ の解は、$x=\pm\sqrt{3}\,i$ )

問１　次のような実数 $x,\ y$ を求めよ。

(1)　$(x+y)+(x+2)i=0$

(2)　$(x-2y)+(2x-3y)i=4+7i$

問２　次の計算をせよ。

(1)　$(1+2i)(4+i)$

(2)　$\dfrac{2+9i}{1+2i}=\dfrac{(2+9i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)}$

(3)　$\sqrt{-2}\sqrt{-3}$

(4)　$\dfrac{\sqrt{-3}}{\sqrt{-4}}$

(5)　$\left(1+\sqrt{-3}\right)^2$

# 2　２次方程式の解

【2 次方程式の解の公式】

2 次方程式　$ax^2+bx+c=0$　の解は　$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

【2 次方程式の解の種類の判別】

2 次方程式　$ax^2+bx+c=0$　の判別式を$D$とすると、$D=b^2-4ac$ (解の公式の$\sqrt{\phantom{x}}$の中)。

$D>0 \iff$ 異なる 2 つの実数解

$D=0 \iff$ 重解（1 つの実数解）

$D<0 \iff$ 異なる 2 つの虚数解

＊2 次方程式 $ax^2+2b'x+c=0$ では、$D=(2b')^2-4ac=4\left(b'^2-ac\right)$ であるから、$D$のかわりに $\dfrac{D}{4}=b'^2-ac$ を用いてもよい。

問１　次の 2 次方程式を解け。

(1)　$x^2+18=0$　　　　(2)　$3x^2+7x+5=0$

問２　次の 2 次方程式の解の種類を判別せよ。

(1)　$3x^2+5x+1=0$　　　　(2)　$9x^2+6x+1=0$　　　　(3)　$2x^2-x+3=0$

問３　2 次方程式 $x^2+2mx+m+6=0$ が実数解をもつとき、定数 $m$ の値の範囲を求めよ。

## $\boxed{3}$　解と係数の関係

【解と係数の関係】

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の 2 つの解 $\alpha$，$\beta$ とすると

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\quad \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

【2 次式の因数分解】

2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ が 2 つの解 $\alpha$，$\beta$ をもつとき

$$ax^2+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$$

【2 次方程式の決定】

2 数 $\alpha$，$\beta$ を解とする 2 次方程式の 1 つは

$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0$　　$\Leftarrow$ $(x-\alpha)(x-\beta)=0$ を展開して

【式の基本変形】

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta$,　　　$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$

$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)$　または　$\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)$

問１　2 次方程式 $x^2-4x+5=0$ の 2 つの解を $\alpha$，$\beta$ とするとき、次の式の値を求めよ。

(1)　$\alpha^2+\beta^2$　　　　(2)　$\alpha^3+\beta^3$

問２　2 次方程式 $x^2+3x+m=0$ の 1 つの解が他の解の 2 倍であるとき、定数$m$の値と解を求めよ。

問３　2 次式 $2x^2 - 2x - 1$ を複素数の範囲で因数分解せよ。

問４　2 数 $3 + i$, $3 - i$ を解とする 2 次方程式を作れ。

$\boxed{4}$　剰余の定理と因数定理

整式 $P(x)$を 1 次式 $x - k$ で割ったときの商を $Q(x)$、余りを $R$ とすると

$$P(x) = (x - k)\,Q(x) + R \qquad R\text{は定数}$$

【剰余の定理】　整式 $P(x)$を 1 次式 $x - k$ で割ったときの余りは　$P(k)$ に等しい

【因数定理】　整式 $P(x)$が 1 次式 $x - k$ を因数にもつ　$\Leftrightarrow$　$P(k) = 0$

$(x - k)\,Q(x)$の形に因数分解できる

〈参考〉

整式 $P(x)$を 1 次式 $ax + b\ (a \neq 0)$ で割ったときの商を $Q(x)$、余りを $R$ とすると

$$P(x) = (ax + b)\,Q(x) + R = a\left(x + \frac{b}{a}\right)Q(x) + R \quad R\text{は定数}\quad\text{となるので}$$

整式 $P(x)$を 1 次式 $ax + b$ で割ったときの余りは　$P\left(-\frac{b}{a}\right)$ に等しい

問１　整式 $P(x) = x^3 + ax^2 + 3x - 2a$ を $x - 2$ で割った余りが 12 であるとき、定数 $a$ の値を求めよ。

問２　整式 $P(x)$ を $x - 1$、$x + 2$ で割った余りがそれぞれ 5、$-1$ であるとき、$P(x)$を$(x - 1)(x + 2)$ で割った余りを求めよ。

問３　$x^3 - 4x^2 + x + 6$ を因数分解せよ。

数学Ⅱ　第２章　複素数と方程式（４）　　　　　　　　　年　　組　　番・氏名

5　高次方程式

【高次方程式（3 次以上の方程式） $P(x)=0$ の解き方】

手順１　因数分解の公式を利用する

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2) \qquad a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3 \qquad a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$$

手順２　公式が利用できないときは、$P(k)=0$ を満たす$k$をみつけて因数分解する

因数定理　$P(k)=0 \iff P(x)=(x-k)\,Q(x)$

問　次の方程式を解け。

(1) $x^4-x^2-2=0$

(2) $x^3-4x^2+8=0$

研究１　組立除法

組立除法を使って，次の第 1 式を第 2 式で割ったときの，商と余りを求めよ。

(1)　$3x^3+2x^2-6x-1$，$x-2$

| （項） | $x^3$ | $x^2$ | $x$ | 定数 | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 3 | 2 | −6 | −1 | |
| × | | 6 | 16 | 20 | (+) |
| | 3 | 8 | 10 | 19 | |
| （商） | $x^2$ | $x$ | 定数 | （余り） | |

答　商 $3x^2+8x+10$，余り 19

(2)　$x^4-x^2+3x-6$，$x+2$

| （項） | $x^4$ | $x^3$ | $x^2$ | $x$ | 定数 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| −2 | 1 | 0 | −1 | 3 | −6 | |
| | | −2 | 4 | −6 | 6 | (+) |
| | 1 | −2 | 3 | −3 | 0 | |
| （商） | $x^3$ | $x^2$ | $x$ | 定数 | （余り） | |

答　商 $x^3-2x^2+3x-3$，余り 0

問　組立除法を使って，次の第 1 式を第 2 式で割ったときの，商と余りを求めよ。

(1)　$x^3-2x^2+3x-9$，$x-3$

(2)　$x^4+x^3-3x^2+x+2$，$x+3$

数学Ⅱ　第２章　複素数と方程式（５）　　　　　　　　年　　組　　番・氏名

研究２　２次方程式の解の実数解の符号

1　$f(x)=ax^2+bx+c\quad(a>0)$ とする。　$f(x)=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$ と変形できるので、

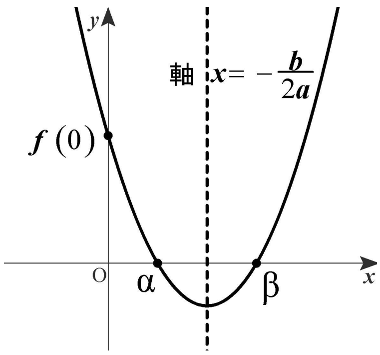
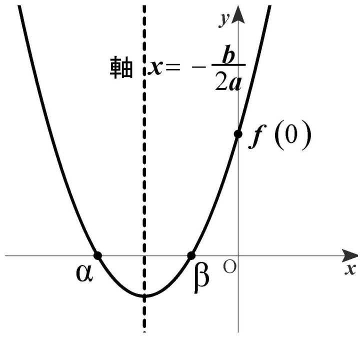
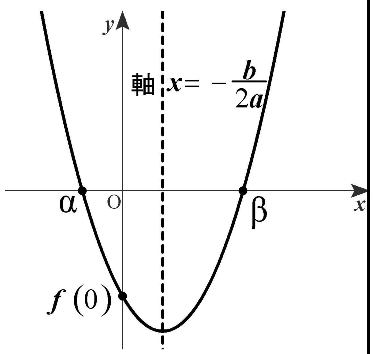
放物線 $y=f(x)$ の軸の方程式は $x=-\dfrac{b}{2a}$，$y$切片は $f(0)$である。

2　2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の判別式を$D$，2 つの解を α，β とする。

$D=b^2-4ac$である。解と係数の関係から　$\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$，$\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$ である。

3　α，β は放物線 $y=f(x)$と$x$軸との共有点の$x$座標である。

このとき，2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解の符号について，次のことが成り立つ。

| | 符号 | 異なる 2 つの正の解 | 異なる 2 つの負の解 | 異符号の解 |
|---|---|---|---|---|
| | グラフ |  |  |  |
| 解法1 | D | D $>0$ | D $>0$ | |
| | $\alpha+\beta$ | $\alpha+\beta>0$ | $\alpha+\beta<0$ | |
| | $\alpha\beta$ | $\alpha\beta>0$ | $\alpha\beta>0$ | $\alpha\beta<0$ |
| 解法2 | D | D $>0$ | D $>0$ | |
| | 軸 | $-\dfrac{b}{2a}>0$ | $-\dfrac{b}{2a}<0$ | |
| | $f(0)$ | $f(0)>0$ | $f(0)>0$ | $f(0)<0$ |

問　2 次方程式 $x^2+2mx+m+2=0$ が異なる 2 つの正の解をもつとき、定数$m$の値の範囲を求めよ。

（解１）

（解２）