算数教育における一般化の教授・学習に関する研究

福岡教育大学大学院　教育学研究科（修士課程）数学教育専攻　河鍋　有一
（福岡教育大学附属久留米小学校）

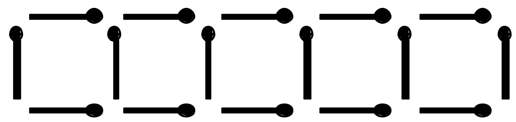
Ⅰ　本研究の動機と目的

平成 17 年４月に国立教育政策研究所教育課程研究センターから，平成 15 年度教育課程実施状況調査の結果が公表された。そこでは，知識・理解や表現・処理に関する内容の調査結果について，改善の傾向にあることが指摘されている。しかし，通過率の向上がみられない，もしくは低下している問題もいくつか指摘されている。低下しているものの１つが資料１の「マッチ棒の問題」である。正方形の形にならべたマッチ棒を１つ２つと右方向へ広げていき，正方形を５個並べたときと，100 個並べたときのマッチ棒の総数を求める問題である。

【資料１　教育課程実施状況調査の問題（吉川，平成 17 年，p.53)】

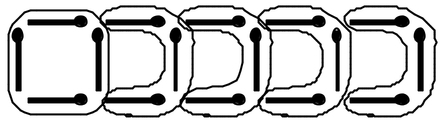
問題 $\boxed{１３}$

マッチぼうを使って，次の図のように正方形を横にならべた形を作ります。



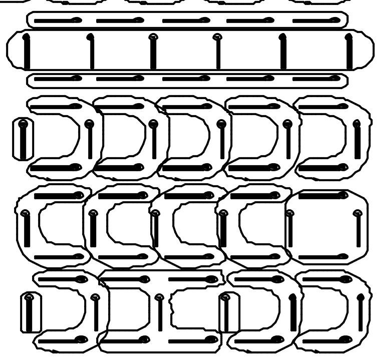
太郎さんと花子さんが，正方形が５このときのマッチぼうの本数の求め方を考えています。

(1) 太郎さんは右の図のように考えています。
　太郎さんの求め方を表す式を□の中に書きましょう。



(2) 花子さんは，１＋３×５という式で求めました。
　花子さんの求め方を表した図はどれですか。
　右の①から④までの中から正しいものを１つ選んで，その番号を□の中に書きましょう。

①
②
③
④



(3) 正方形を横に 100 こならべた形をつくったとき，マッチぼうは全部で何本になりますか。
　求める式と答えを，それぞれ□の中に書きましょう。

【表１　平成 15 年度　マッチぼう問題の調査結果】［単位：%］

問題	問題内容	設定通過率（平成 15 年度）	今回通過率（平成 15 年度）	前回通過率（平成 13 年度）	前々回通過率（平成６年度）
13(1)	図→式	70	60.5	59.9	
13(2)	式→図	50	75.6		
13(3)	式	50	▼38.4	44.3	
13(3)	答　え	50	▼35.1	▼38.7	47.8

※ C13(2)は平成 15 年度は選択式に変更

このような問題は，きまりを見つけて，それをもとに問題を解決していくものであり，「パターン発見」問題といわれている。所謂「一般化」という数学的な考え方を活用する問題である。一般化は，

算数・数学的思考の本質の１つといえるもので，従来から重要視されてきた。しかし，表１に示されるように，調査結果が向上しない現状を考えるとき，その困難性の要因を明らかにし，その改善策を検討する必要がある。こうした課題意識の下，本研究の目的を設定している。本研究では，具体的に，通過率の向上が見られない問題の原因を次の２点からとらえている。

目的①：一般化における「パターン発見」方略を指導する学年は妥当か。
目的②：指導する学年が妥当であるとすれば，教科書等での指導の在り方は適切か。

目的①に関して，上記の教育課程実施状況調査は，小学校第５学年で実施されている。また，第５学年の一部の教科書をみると，数量関係とのかかわりで取り扱われるようになっている。しかし，指導されて間もない時期に調査が行われているにもかかわらず，通過率が悪い。ということは第５学年で指導するのは適切でないかもしれないのである。もしくは目的②に関して，第５学年が指導に適切な発達段階であったとしても，指導方法やカリキュラムに問題があり，その能力の育成が十分に行われていない可能性も考えられる。以上の要因の解明のために，本研究では，一般化における「パターン発見」方略の指導の在り方に焦点を当てた。そして，その指導に適切な学年と適切な指導の在り方について研究していくことを目的とした。

Ⅱ　一般化に関する考察

１　適時性について

本研究の目的の検証のために，先行研究を考察している。その考察の視点は次の２つである。１つは，「パターン発見」方略の指導の「適時性」であり，２つめは，その指導の在り方である。第１の「適時性」のとらえ方について，本研究では，深田の研究を参考にしながら，次のように定義した。

適時性：子どもの自然な成長（自然発達）に加え，文化的環境の中での成長（文化的発達）を考慮した，あるもの・ことを教えるのに適した時期

２　「パターン発見」指導の適時性に関する先行研究

第２の「パターン発見」方略の指導に関する先行研究については，石田淳一らの一連の研究を考察した。石田らは，児童の実態の把握と改善を目的として，「パターン発見」問題の解決に関する困難性の要因を探り，指導への示唆を明らかにする研究を継続的に展開している。考察の結果，氏らの研究の主な論点並びに主張点は次のように整理される。

○項数の大きさと正答率には関係がある。
○問題解決に必要な「パターン発見」方略を指導し，その経験を豊かにする。
○問題の構造を表した図及び式を与えると正答率が向上する。

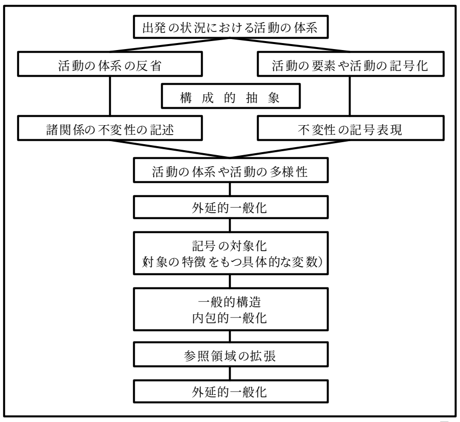
しかし，石田らの研究における上記の成果をもとに「パターン発見」に関する授業を実際に構成しようとするとき，適時性の観点からみて，いくつかの未解決となっている課題もあると考える。それは次のような点である。

●ほとんどの子どもが「パターン発見」方略を持っていないため，結果として，その方略を与える指導になってしまっていること。
●問題の構造をとらえるためには，適切な手だてによる指導ではなく，解法を例示することが有効だとしていること。

これでは，まず，例題として解法を与え，その応用問題を解くという授業の展開になってしまい，数理を創り出す授業として成立しない。したがって，「どの学年においてどの程度の示唆を与えれば，どの程度の正答率の上昇がみられるか」という適時性に関する課題は，今なお未解決であると考えられる。

３　Dorflerの一般化モデル

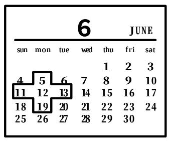
さらに第２に関しては，「Dörfler の一般化モデル」に注目した。このモデルの特徴は，認識論的な視座から一般化の過程を段階的に構造化し，一般化モデルを構築した点にある。また，このモデルが指導への示唆に富む点は，「記号の対象化」の段階を中核として，「パターン発見」方略の指導において重要な，変数の考えを養うのに最適なモデルになっていることである。さらに，「構成的抽象」として，多様な活動から出発する点も実際の指導に生かせるモデルである。それゆえ，「パターン発見」方略の指導の在り方を考える際，有効なモデルとなる。



【図１　Dörfler の一般化モデル（Dörfler，1991，p.74)】

ここで，図１のモデルで指導の在り方を考える際，重要となる段階について，Dörfler による定義を紹介しながら，「カレンダーの数」（中学校・課題学習）の事例に重ねて説明してみたい（岩崎・山口，2000）。

これは，1995 年６月のカレンダーです。これについて考えてみましょう。



(1) カレンダーの５つの数を十字の形で囲みます。どんな関係があるでしょうか。
(2) 十時の形を動かしてみましょう。
(3) 枠の形や位置を自由に変えてカレンダーの中にある関係をいろいろ見つけましょう。

「構成的抽象」

Dörfler の一般化の特徴は活動から始まる点と，その記号過程を「構成的抽象」とし，これを基盤に一般化が展開される点にある。つまり，「構成的抽象」というのは，諸活動によって裏打ちされた意味や実体性を持つ構成要素間の不変な状態を記述する記号化の過程である。

カレンダーの事例でいえば，問題を読み，「３つの数をたす」「和を比べる」という活動の要素が浮かび上がる。これが「活動の体系の反省」である。和が等しいことを発見した後，ことばや記号を使ってその不変性を記述する。枠内の他の場合の探求へと進む。これら一連の活動を「構成的抽象」と呼ぶ。構成的というのは活動を主体としているからであり，活動の多様性もここでは重要視されている。

「外延的一般化」

記号化された不変性が，一般性を持つために，記号が，探求の画面（search-screen）として機能することを一種の「外延的一般化」と呼んでいる。

カレンダーの事例では，十字の形の位置を変えるなど，「他のところではどうか」と考えを進めることが「外延的一般化」である。とらえた関係を他の事例で適用させてみて，一般化のための事例を増やし，比較検討していく段階である。

「記号の対象化」

やがて不変性の記号的記述が反省されるようになる。そして，記号が参照領域から切り離されて記号自体が対象化される段階を「記号の対象化」という。Dörfler の一般化モデルにおける「記号の対象化」は，「構成的抽象」の終点であると同時に，その後の一般化の始点でもあるため，抽象と一般化を結びつける重要な役割を担うことになる。そのため「記号の対象化」は，変数を構成する契機となる。このことによって一般化は，数学的活動の本質をなす。なぜなら「記号の対象化」は，演繹的推論を可能にする記号操作に，有意味な基盤を与えるからである。

カレンダーの事例では，例えば，「13 ＋ 14 ＋ 15 ＝７＋ 14＋ 21」という関係の不変性を記述する方法を考え，その根拠を説明しようとする。この段階が「記号の対象化」である。記号自体

が思考の対象となる段階である。

「内包的一般化」

記号は対象の性質をもった「変数」である。よって内包は一般的構造をもち，この構造に注目することを「内包的一般化」という。

カレンダーの事例でいえば，「(n-1)＋ n ＋(n+1)＝(n-7)＋ n ＋(n+7)」と文字を使って，不変性が記述され，この関係構造を認識したとき，「内包的一般化」が成立したことになる。本質的な一般化のためには不変性の理解に伴って，記号を使った式での理解は重要である。

Ⅲ 「パターン発見」方略に関する基礎的調査

これらの一般化に関する考察をもとに，以下に示す具体的な目的に関する検証を行った。まず，一般化における「パターン発見」方略に焦点を当てながら，次の２点の適時性に関する基礎的調査を行った。

1. 第４学年児から第６学年児を対象とした「パターン発見」方略に関する調査問題を開発し，方略指導に関する適切な時期を明らかにすること。
2. 「パターン発見」方略に関する具体的な指導のあり方を探ること。

ここで，基礎的調査としたのは，あくまでも本研究のねらいは，実際の指導に生かすことであり，本研究での２つの教授実験のための調査だからである。

本調査においては，有効であろう手だてをまず吟味した。その結果，次ページに示すような４つの手だての有無によって，結果にどれだけの違いが出てくるかを考察することにした。その上で，手だてのない調査問題A，手だてを施した調査問題Ｂ，そして，解法を例示した調査問題Ｃの３種類の調査問題を作成している。

① ５番目，６番目，100 番目と，帰納的推論を促す。
② 図を示す。
③ まとまりのいくつ分という観点で構造を乗法的にとらえさせる。
④ 項数が多い場合でも使える解法を例示する。

【表２　調査問題ごとの正答率】

	n＝5	n＝6	n=100	調査問題	調査人数
	正答率（%）	正答率（%）	正答率（%）		N
第4学年	39.71		19.12	A	68
	56.52	53.62	11.59	B	69
		73.81	42.86	C	75
第5学年	66.67		25.33	A	75
	70.67	74.67	49.33	B	75
		93.55	64.52	C	31
第6学年	67.14		42.86	A	70
	83.10	84.51	56.34	B	71
		92.75	73.91	C	69

表２の基礎的調査の結果から，一般化に関わる学習は，第５学年における指導の有効性が推察された。また，上記①～③の手だての有効性も示された。さらに，関係や構造を簡潔に積の形でとらえた方がよいことも示された。このことは，以下で詳述する教授実験に非常に有効な示唆を与えている。

Ⅳ　適時性に関する検証授業（検証授業①）

基礎的調査で明らかになったことを授業で検証した。まず適時性について授業を通して明確にするために，第４学年と第５学年を対象としながら，検証授業①を行った。なお，第６学年は先行研究でも基礎的調査でも正答率がよいので，対象からは除外した。さらに，Dörfler の一般化モデルで中核となる一般項にまとめる段階が手だてとして有効かどうかを教授実験により確かめた。そのために，その授業では，両学年の授業とも全く同じ指導過程による授業を行った。授業後に両学年共通の事後調査問題を行い，「パターン発見」方略獲得の程度や授業前に行った事前調査との変容を考察している。

【表３　事前調査と事後調査①の正答率の比較】

第４学年　事前N＝ 37，事後①N＝ 37，　第５学年　事前N＝ 45，事後①N＝ 45

		問題１：三角形にならべたおはじき		問題２：正方形が増えるマッチ棒	
		問 1(%)　n=5	問　2(%) n=100	問 1(%)　n=5	問　2(%) n=100
4年	事前	70.27%	35.14%	75.68%	16.22%
	事後①	**72.97%**	**▼2.7　32.43%**	**75.68%**	**+5.4　21.62%**
5年	事前	60.00%	35.56%	71.11%	33.33%
	事後①	**71.11%**	**+22.2　57.78%**	**80.00%**	**+13.3　46.67%**

【表４　事前調査と事後調査①の式の比較：問題１】

第４学年　事前N＝ 37，事後①N＝ 37，第５学年　事前N＝ 45，事後①N＝ 45

注：項数を用いている式に波下線

		式の形式	第４学年（%） 事　前	第４学年（%） 事後①	第５学年（%） 事　前	第５学年（%） 事後①
問題1	問1	５＋４＋３	5.41	0	8.89	0
		４×３	18.92	37.84	22.22	8.89
		５×３－３	24.32	8.11	15.56	46.67
	問2	100 ＋ 99 ＋ 98	5.41	2.70	8.89	2.22
		99 × ３	5.41	10.81	6.67	4.44
		100 ×３－３	21.62	16.22	17.78	46.67
問題2	問1	１＋３×５	10.81	16.22	8.87	17.78
		４＋３×４	10.81	0	17.78	8.89
		４×５－４	10.81	10.81	13.33	37.78
	問2	１＋３× 100	5.41	16.22	8.89	15.56
		４＋３× 99	8.11	0	8.89	6.67
		４× 100 － 99	2.70	2.70	11.11	20.00

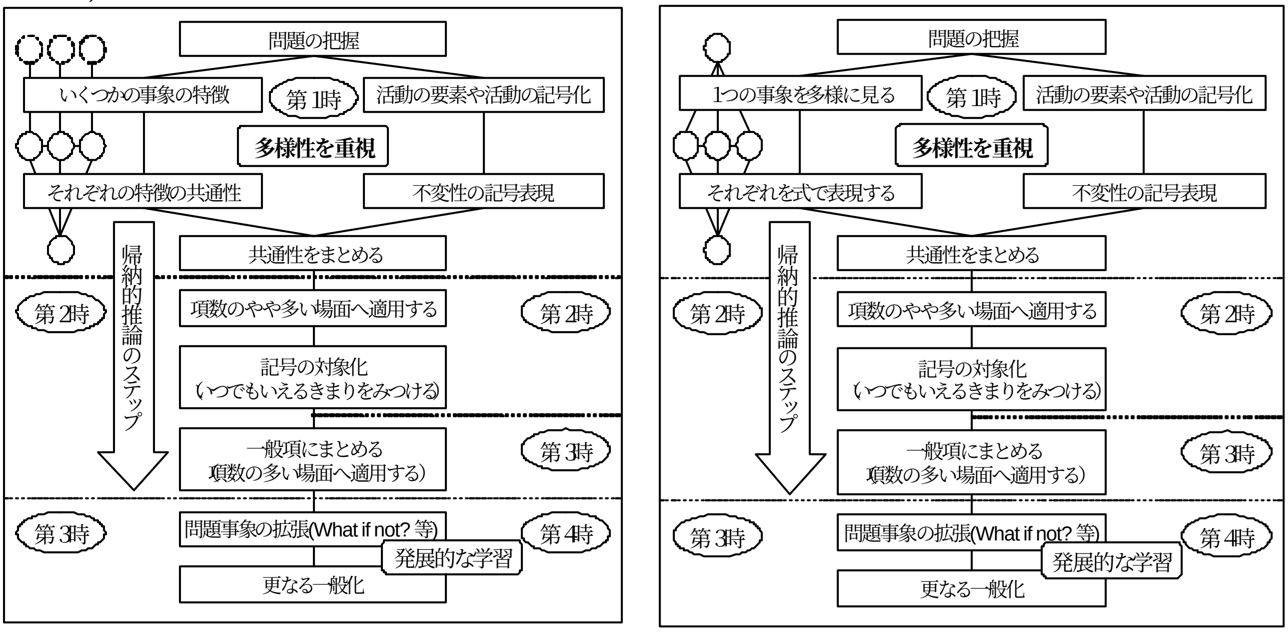
（注：乗数，非乗数の順序の違いは同じ式とみなす）

表３のように，教授実験の結果，検証授業①での一般化の「パターン発見」に関わる学習は，第５学年で指導すると最も効果的であるという基礎的調査の結果が追認された。さらに，表４のように，第５学年児の調査問題での立式の変容やその傾向から，５番目であれば，「５」という「項数」を使って求めようとする変数の考えが多くみられることがわかった。つまり，記号や文字を使った式（一般項）にまとめることは，第５学年児の方に定着しやすいことがわかり，手だてとしても有効であるといえる。

V　一般化教授・学習モデルによる検証授業（検証授業②）

1　一般化教授・学習モデル

さらに，第５学年という適時性をふまえ，一般化に深く関わる内容の教科書単元の教授実験を実施した。そのために，前に考察した Dörfler の一般化モデルに基づいて，「パターン発見」方略の育成に関わる，図２の「一般化教授・学習モデル」を作成した。



【図２　２つの一般化教授・学習モデル】

ここでは，基礎的調査や検証授業①で明らかになった成果を取り入れながら，指導への示唆に富むモデルを構築しようと試みている。その大きな特徴として，問題事象の提示の仕方の工夫を行っていることや，一般項にまとめ活用させる段階を仕組むことなどがあげられる。以下では，各時間ごとの活動の概略を紹介する。

・第１時

問題事象と出会う段階である。一般化に向けて大きく２つのパターンにわかれる。いくつかの事象から抽出する場合と，１つの事象を多様に考察する場合である。例えば，四角形の内角の和を求める場合などは前者であり，いくつかの四角形を用いて『どんな四角形でも』という意識を持たせる。また，「パターン発見」問題は後者にあたり，１つの事象をいろいろな『まとまりのいくつ分』の見方でとらえさせ，式表示させる。

・第２時（第２，３時）

ここでは，同じ構造を持つやや項数の多い事象に出会わせ，第１時の数理を適用させ，きまりを見つけ，一般項にまとめる段階である。例えば，四角形の内角の和を求めた後に五角形以上の内角の和を求めさせたりするなど，項数を多くした事象に出会わせ，前の時間の数理が使えるか否かについて，確かめる活動を行わせる。そして，第１時と第２時での式や図を比較し，『変わるものと変わらないもの』という変数の観点から，記号やことばを使った式（一般項）にまとめさせていく。そして項数が非常に大きい場合について，一般項を適用できるようにさせる。小学校段階でも一般項をつくり，活用させることは重要である。

・第３時（第４時）

「What if not ?」のように，条件を変えて考察していく段階である。例えば，正方形のおはじきを正三角形に条件変更する場合などがその一例である。

２　一般化教授・学習モデルによる検証授業の実際

検証授業②では，一般化（パターン発見）の指導における一般化教授・学習モデルの有効性について，教科書単元の授業によって検証することを目的とした。検証授業②では，この授業の効果を明らかにするために，実験群と統制群による比較を行い，実験群には一般化教授・学習モデルに基づく指導を行っている。一方，統制群には，教科書に基づく通常の指導を行っている。

本検証授業②による達成度の差を検証するため，検証授業①と同様の方法で，２種類の調査問題を作成し検証した。その結果，表５や表６のように，一般化教授・学習モデルに基づいて，単元・授業の構成を工夫し，指導すると有効であることが確認された。

【表５　実験群の事前と事後①の正答率（%）】
実験群　事前N＝ 38，事後①N＝ 39

	（1）図→式	（2）式→図	（3）n=100：式	（3）n=100：答
事前調査	71.05	65.79	36.84	36.84
事後調査①	79.49	76.92	66.67	66.67

【表６　事後調査②の正答率（%）】
実験群　N＝ 39，統制群　N＝ 39

	（1）図→式	（2）式→図	（3）n=100：式	（3）n=100：答
実験群	74.36	43.59	43.59	43.59
統制群	84.62	43.59	38.46	35.90

Ⅵ　研究のまとめ

最後に，本研究を総括した。本研究の主な結論として，次の諸点があげられる。

結論①：「パターン発見」に関する指導に適切な時期は，第５学年である。

結論②：次の５つの手だての有効性が明らかになった。

- 帰納的推論のステップを入れること
- 図を示し，活用させること
- まとまりを意識させること（乗法的にとらえさせる）
- １つの図からいろいろな構造を読み取らせ，式化すること
- 一般項（□や△などの記号やことばを使った式）にまとめ，活用すること

結論③：本研究で有効性が示された手だてや，Dörfler の一般化モデルをもとに作成した『一般化教授・学習モデル』に基づいて，第５学年単元「三角形と角」を指導した場合，事後調査問題において正答率の向上がみられた。

本研究の課題としては，第５学年における他の単元での一般化教授・学習モデルの有効性を確かめることがあげられる。また，児童にとって一般項を自ら作り上げることは困難であった。この点については，指導の時間や手だてという面から改善を図る必要がある。

本研究は，「内容」に関する指導の適時性の検証は勿論のこと，一般化という「数学的な考え方」の指導の適時性を緻密に明らかにしていくものであった。これは，今後の算数科の教育課程を考えていく上でも重要であり，本研究の今後の可能性を示唆するものである，と考えている。

引用・参考文献

石田 淳一（1983）．「算数教育と問題解決」，『愛知教育大学研究報告』，32（教育科学編），pp.277-292.

石田 淳一（1990）．「パタン発見方略の指導に関する研究」，『筑波大学教育学系論集』，第 15 巻，第１号，pp.57-66．

石田 淳一（1992）．「⑤日米共通調査問題による問題解決の研究－「おはじきの数」の問題の分析－」，三輪 辰郎 編著．『日本とアメリカの数学的問題解決の指導』，東洋館出版社，pp.80-100．

石田 淳一（1997）．「長期間の問題解決方略の指導を受けた小学６年生の問題解決方略の使用に関する上位－下位分析」，『日本数学教育学会誌・数学教育学論究』，69，pp.3-19.

石田 淳一（1998a）．「「パターン発見」問題の解法の一般化に関する調査研究（II）」，『日本数学教育学会誌・算数教育』，第 80 巻，第６号，pp.2-8．

石田 淳一（1998b）．「「パターン発見」問題の解法の一般化に関する調査研究III」，『科学教育研究』，Vol.22，No.４，pp.223-230.

石田 淳一（2002）．「小学生の「一般化」問題の解法における困難性」，『日本数学教育学会誌・算数教育』，第84 巻，第６号，pp.23-31.

石田 淳一（2003）．「「一般化」問題の解法に関する調査研究IV」，『科学教育研究』，Vol.27，No.２，pp.94-100．

石田 淳一・佐藤 佳世（1996）．「「パターン発見」問題の解法の一般化に関する調査研究Ｉ」，『日本数学教育学会誌・算数教育』，第78 巻，第４号，pp.35-39.

岩崎 秀樹・山口 武志（2000）．「一般化の過程に関する認知論的・記号論的分析」，『日本数学教育学会誌・数学教育学論究』，82，pp.1-22．

河鍋 有一（2005）．「問題解決過程における一般化に関する研究(1)」，『九州数学教育学研究』，第 12 号，pp.35-45.

木村 理奈子（2001）．「一般化問題の解決における「簡単な場合で考える」方略使用の困難性に関する調査研究」，『日本数学教育学会誌・算数教育』，第 83 巻，第４号，pp.2-9.

国立教育政策研究所教育課程研究センター（2003）．『平成 13 年度 小中学校教育課程実施状況調査報告書 小学校 算数』，東洋館出版社.

佐藤 佳世（1999）．「小学生の「一般化問題」における解決の困難性に関する調査研究」，『日本数学教育学会誌・算数教育』，第 81 巻，第８号，pp.10-14.

澤田 利夫 他（平成 17 年）．『小学算数５上』，教育出版.

清水 静海 他（平成 17 年）．『わくわく算数５上』，啓林館.

杉山 吉茂 他（平成 17 年）．『新編新しい算数５上』，東京書籍.

地方分権研究会（平成 17 年）．『平成16 年度統一学力テスト報告書』，地方分権研究会，p.61.

中島 健三（昭和 56 年）．『算数・数学教育と数学的な考え方』，金子書房.

中原 忠男 他（平成 17 年）．『小学算数５年上』，大阪書籍.

中原 忠男 編集（2000）．『算数・数学科重要用語 300 の基礎知識』，明治図書.

中原 忠男（1995）．『算数・数学教育における構成的アプローチの研究』，聖文社.

原田 昌彦・石田 淳一（2002）．「５年生の「一般化」問題解決における困難性克服に関する教授実験」『日本数学教育学会誌・算数教育』，第 84 巻，第 10 号，pp.2-11.

原田 昌彦（2004）．「小学５年生に対する「一般化」問題の解決における困難性克服の指導に関する研究」，『日本数学教育学会誌・算数教育』，第 86 巻，第 10 号，pp.2-12.

深田 昭三（2004）．「第２章 理数科系教育における学習の適時性と適切性」，『平成 16 年度・文部科学省科学研究費補助金・特定領域研究・新世紀型理数科系教育の展開研究，Ａ０１班（教育内容と学習の適時性に関する研究）研究成果中間報告書』（Ａ０１班総括：広島大学 中原 忠男，課題番号 14022101），pp.5-10.

文部省（平成 11 年）．『小学校学習指導要領解説算数編』，東洋館出版社.

吉川 成夫（平成 17 年）．「子どもたちを理解し算数の学習指導に生かす」，『初等教育資料』，東洋館出版社，No.796，pp.46-57.

Dörfler,W.（1991）．Forms and Means of Generalization in Mathematics，Bishop,A.J.(ed.)，*Mathematical knowledge：Its Growth Through Teaching*，Kluwer Academic Publishers，pp.63-85.

National Council of Teachers of Mathematics （2000）．*Principles and Standards for School Mathematics*，National Council ofTeachers of Mathematics.